KỸ THUẬT HỆ SỐ BẤT ĐỊNH GIẢI BẤT ĐẲNG THỨC UCT

WWW.TOANMATH.COM

- *Nguyễn Thúc Vũ Hoàng*

Học sinh chuyên Toán-Tin-THPT Chuyên Lê Quí Đôn-Niên khóa 2006-2008
Thị xã Đông Hà-Tỉnh Quảng Trị

- *Võ Quốc Bá Cẩn*

Sinh viên K32 Khoa Dược-Đại học Y Dược Cần Thơ -Niên Khóa 2006-2011
Thành Phố Cần Thơ

Có bao nhiêu điều bí ẩn mà bạn chưa biết đến ?! Câu trả lời là rất rất nhiều và đôi khi bạn cảm thấy bực bội, khó chịu khi không thể tìm ra một lời giải thích thỏa đáng cho bí ẩn nào đó. Nhưng bạn hãy quan niệm rằng đằng sau bất kì một điều gì luôn hàm chứa một ý nghĩa nhất định. Và cũng không phải ngẫu nhiên mà sự lí giải lại được hình thành. Trong thế giới bất đẳng thức cũng vậy. Đôi khi bạn không thể hiểu được tại sao người ta lại có thể tìm ra một lời giải trông có vẻ "kì cục" như thế !!! Phải chăng là lần mò và may rủi lắm mới tìm ra được ?
Câu trả lời lại một lần nữa được nhắc lại: mỗi lời giải đều có sự giải thích của riêng bản thân nó. Việc tìm ra lời giải đó phải đi qua một quá trình lập luận, thử, sai và đúng. Trong chuyên đề nho nhỏ này chúng tôi muốn giới thiệu đến các bạn một kĩ thuật cơ bản nhưng không kém phần hiệu quả trong việc chứng minh một số dạng của bất đẳng thức. Nó không giúp ta giải quyết tất cả các bài toán mà chỉ giúp ta tìm ra những lời giải ngắn gọn và ấn tượng trong một lớp bài toán nào đó. Một số bài toán tuy dễ đối với phương pháp này nhưng lại là khó đối với kỹ thuật kia. Đây cũng là điều hiển nhiên và dễ hiểu.

Mục lục

- Phần 1. Bài toán mở đầu.
- Phần 2. Khởi đầu cùng một số bài toán cơ bản.
- Phần 3. Kĩ thuật chuẩn hóa và ***U.C.T***
- Phần 4. ***U.C.T*** và kỹ thuật phân tách các trường hợp
- Phần 5. Kết hợp bất đẳng thức Vornicu Schur với ***U.C.T***
- Phần 6. Một dạng biểu diễn thú vị
- Phần 7. Giải quyết một số bài toán mà điều kiện liên quan mật thiết đến nhau
- Phần 8. ***U.C.T*** mở rộng
- Phần 9. Lời kết
- Phần 10. Bài tập áp dụng

Phần 1. Bài toán mở đầu

Bài toán. [Nguyễn Thúc Vũ Hoàng]
Cho a,b,c là các số thực dương thỏa mãn $a+b+c=3$. Chứng minh rằng
$$\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}+\frac{1}{c^2}+\frac{2(a^2+b^2+c^2)}{3}\geq 5$$
Chứng minh. Ta sử dụng bất đẳng thức sau đây
$$\frac{1}{a^2}+\frac{2a^2}{3}\geq \frac{7}{3}-\frac{2a}{3}$$
Thật vậy bất đẳng thức trên tương đương với
$$\frac{(a-1)^2(2a^2+6a+3)}{3a^2}\geq 0$$
Hiển nhiên đúng với a là số thực dương.
Sử dụng các bất đẳng thức tương tự với b và c. Ta có điều phải chứng minh.
Đẳng thức xảy ra khi $a=b=c=1$.

Chắc chắn ngay khi đọc lời giải cho bài toán " đơn giản" này bạn có phần lúng túng và không hiểu tại sao lại có thể tìm ra bất đẳng thức phụ một cách "khó hiểu" như vậy. Phải chăng là dự đoán một cách "vô hướng". Hoặc cũng có người sẽ nghĩ bài toán trên được tạo ra từ chính bất đẳng thức phụ đó. Câu trả lời là hoàn toàn không phải. Tất cả đều đi theo 1 qui luật của nó. Ở các phần tiếp theo chúng tôi sẽ phân tích về một kỹ thuật phân tích giúp tìm ra các bất đẳng thức phụ và mở rộng vấn đề này theo chiều hướng khá mới mẻ. Kỹ thuật này có tên là ***U.C.T***, là viết tắt của 3 chữ cái đầu của cụm từ tiếng Anh ***U****ndefined* ***C****oefficient* ***T****echnique*. Hay còn gọi là *Kỹ Thuật Hệ số bất định*. Đây là một kỹ thuật cơ bản và là nền tảng quan trọng trên con đường tìm kiếm lời giải cho những bất đẳng thức khó.

Phần 2. Khởi đầu cùng một số bài toán cơ bản

Chúng ta sẽ khởi đầu kỹ thuật này bằng việc đưa ra cách giải thích cho việc tìm ra bất đẳng thức phụ trên và nó cũng chính là cách giải thích cho các bài toán sau này của chúng ta.

Bài toán trên các biến trong cả 2 vế và điều kiện đều không ràng buộc nhau điều này khiến ta nghĩ ngay sẽ tách theo từng biến để chứng minh được đơn giản hơn nếu có thể. Nhưng rõ ràng ta chỉ từng đó thôi là không đủ. Nếu ta chứng minh bất đẳng thức sau
$$\frac{1}{a^2}+\frac{2a^2}{3}\geq \frac{5}{3}\Leftrightarrow \frac{(a-1)(a+1)(2a^2-3)}{3a^2}\geq 0$$
Rõ ràng không hoàn toàn đúng với a thực dương.
Đừng bỏ cuộc tại đây bởi vì ở cách trên ta chưa sử dụng điều kiện $a+b+c=3$.
Như vậy ta sẽ không đi theo đường lối suy nghĩ đơn giản ban đầu nữa mà sẽ đi tìm hệ số để bất đẳng thức sau là đúng
$$\frac{1}{a^2}+\frac{2a^2}{3}\geq \frac{5}{3}+ma+n \qquad (1)$$
Trong đó m và n là các hệ số chưa xác định.
Tương tự với biến b và c. Cộng vế theo vế ta có

$$\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}+\frac{1}{c^2}+\frac{2a^2+2b^2+2c^2}{3}\ge\frac{5}{3}+m(a+b+c)+3n=\frac{5}{3}+3(m+n)$$

Như vậy ở đây 2 hệ số m và n phải thỏa mãn điều kiện $m+n=0\Leftrightarrow n=-m$. Thế vào (1) dẫn đến

$$\frac{1}{a^2}+\frac{2a^2}{3}\ge\frac{5}{3}+m(a-1)\qquad(2)$$

Đến đây ta chỉ cần xác định hệ số duy nhất là m để bất đẳng thức (2) là đúng.

Chú ý ở bài toán này điểm cực trị đạt được tại $a=b=c=1$ nên ta cần xác định m sao cho

$$\frac{1}{a^2}+\frac{2a^2}{3}\ge\frac{5}{3}+m(a-1)\Leftrightarrow(a-1)\left(\frac{(a+1)(2a^2-3)}{3a^2}-m\right)\ge0$$

Khi cho $a=1$ thì ta có $\frac{(a+1)(2a^2-3)}{3a^2}=-\frac{2}{3}$ từ đó ta dự đoán rằng $m=-\frac{2}{3}$ để tạo thành đại lượng bình phương $(a-1)^2$ trong biểu thức. Từ đó ta sẽ chứng minh bất đẳng thức phụ

$$\frac{1}{a^2}+\frac{2a^2}{3}\ge\frac{7}{3}-\frac{2a}{3}$$

Quá trình đi tìm bất đẳng thức phụ đã được phân tích cụ thể ở trên. Tuy nhiên đó không phải là cách duy nhất để ta tìm ra hệ số. Ta cũng có thể sử dụng tính chất của đường tiếp tuyến tại một điểm của đồ thị hay sử dụng đạo hàm. Nhưng có lẽ cách dự đoán trên là hữu hiệu và đơn giản về mặt trực quan cũng như thực hiện. Tuy nhiên tất cả cũng chỉ là sự dự đoán. Nó không đảm bảo rằng sau khi tìm ra bất đẳng thức phụ rồi thì bài toán sẽ được giải quyết. Một số dạng toán như vậy sẽ được đề cập trong các phần tiếp theo của chuyên đề này. Ở phần 1 này chúng ta sẽ chứng minh một số bất đẳng thức cơ bản để hình thành trong đầu kỹ thuật qua đó thành thục trong việc phân tích. Ta tiếp tục đến với bài toán sau

Bài toán 1. [Vasile Cirtoaje]

Cho a,b,c,d là các số thực dương thỏa mãn $a+b+c+d=4$. Chứng minh rằng

$$\frac{1}{a^2+1}+\frac{1}{b^2+1}+\frac{1}{c^2+1}+\frac{1}{d^2+1}\ge2$$

Chứng minh. Ta sẽ xác định hệ số m để bất đẳng thức sau là đúng

$$\frac{2}{a^2+1}\ge1+m(a-1)\Leftrightarrow-\frac{(a-1)(a+1)}{a^2+1}\ge m(a-1)\Leftrightarrow(a-1)\left(-\frac{a+1}{a^2+1}-m\right)\ge0$$

Khi $a=1$ ta sẽ có $-\frac{a+1}{a^2+1}=-1\Rightarrow m=-1$. Ta dự đoán bất đẳng thức sau đúng và thật vậy

$$\frac{2}{a^2+1}\ge2-a\Leftrightarrow\frac{a(a-1)^2}{a^2+1}\ge0$$

Tương tự với các biến còn lại. Cộng vế theo vế ta có điều phải chứng minh.

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a=b=c=d=1$.

Nhận xét.

Ta có thể sử dụng kỹ thuật "Côsi ngược dấu" để tìm ra bất đẳng thức phụ trên

$$\frac{1}{a^2+1}=1-\frac{a^2}{a^2+1}\ge 1-\frac{a^2}{2a}=1-\frac{a}{2}$$

Bài toán 2. [Algebraic Inequalities Old and New Method]

Cho a,b,c là các số thực dương thỏa mãn $a+b+c=3$. Chứng minh rằng

$$\frac{1}{a^2+b+c}+\frac{1}{b^2+c+a}+\frac{1}{c^2+a+b}\le 1$$

Chứng minh. Ở đây ta cần tìm m để bất đẳng thức dưới là đúng

$$\frac{1}{a^2+b+c}=\frac{1}{a^2-a+3}\le\frac{1}{3}+m(a-1)\Leftrightarrow -\frac{a(a-1)}{3(a^2-a+3)}\le m(a-1)$$

Tương tự như trên ta tìm dự đoán rằng với $m=-\frac{1}{9}$ thì bất đẳng thức phụ đúng. Thật vậy

$$\frac{1}{a^2-a+3}\le\frac{4}{9}-\frac{a}{9}\Leftrightarrow 0\le\frac{(a-1)^2(3-a)}{3(a^2-a+3)}\Leftrightarrow 0\le\frac{(a-1)^2(b+c)}{3(a^2-a+3)}$$

Nhận xét. Bài toán trên có thể giải bằng kĩ thuật "Phân tách Chebyshev" nhưng xem ra cách giải bằng ***U.C.T*** lại đơn giản hơn về mặt ý tưởng.

Bài toán tổng quát đã được giải quyết bằng định lí LCF trong "Algebraic Inequalities - Old and New method" của tác giả Vasile Cirtoaje

Cho $a_1,a_2,...,a_n$ là các số thực không âm thỏa mãn $a_1+a_2+...+a_n=n$. Chứng minh rằng

$$\frac{1}{a_1^{\,2}-a_1+n}+\frac{1}{a_2^{\,2}-a_2+n}+...\frac{1}{a_n^{\,2}-a_n+n}\le 1$$

Bài toán 3. [Nguyễn Thúc Vũ Hoàng]

Cho a,b,c,d là các số thực không âm thỏa $a^2+b^2+c^2+d^2=4$. Chứng minh rằng

$$2(a^3+b^3+c^3+d^3)\ge 2+\frac{3}{\sqrt{2}}\sqrt{2+ab+ac+ad+bc+bd+dc}$$

Chứng minh. Theo bài ra a,b,c,d là các số thực dương thỏa mãn

$$a^2+b^2+c^2+d^2=4$$
$$\Leftrightarrow (a+b+c+d)^2=2(2+ab+ac+ad+bc+bd+cd)$$
$$\Leftrightarrow (a+b+c+d)=\sqrt{2(2+ab+ac+ad+bc+bd+cd)}$$

Bất đẳng thức cần chứng minh tương đương với

$$2(a^3+b^3+c^3+d^3)\ge 2+\frac{3}{2}(a+b+c+d)$$

Ta cần xác định hệ số m để bất đẳng thức sau đúng

$$2a^3\ge\frac{3a+1}{2}+m(a-1)\Leftrightarrow\frac{(2a+1)^2(a-1)}{2}\ge m(a-1)$$

Dễ dàng dự đoán $m=\frac{9}{2}$. Ta sẽ chứng minh điều đó, thật vậy

$$2a^3\ge\frac{3a+1}{2}+\frac{9(a-1)}{2}\Leftrightarrow 2(a-1)^2(a+2)\ge 0$$

Điều này hiển nhiên đúng. Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a=b=c=d=1$.

Nhận xét. Bài toán này với hình thức khá "cồng kềnh" vì chứa căn thức. Tuy nhiên nếu nhận ra điểm mấu chốt của bài toán ta dễ dàng đưa về đơn lượng theo biến để giải quyết. Bài toán trên còn có thể giải quyết theo cách khác bằng cách chứng minh trực tiếp với 4 biến. Nhưng dù sao việc giải quyết theo từng biến riêng biệt vẫn dễ dàng hơn rất nhiều.

Bài toán 4.

Cho a,b,c là các số thực dương thỏa mãn $a^3+b^3+c^3=3$. Chứng minh rằng

$$4\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right)+5(a^2+b^2+c^2)\geq 27$$

Chứng minh.

Ta cần tìm hệ số m sao cho

$$\frac{4}{a}+5a^2\geq 9+m(a^3-1)\Leftrightarrow\frac{(a-1)(5a^2+5a-4)}{a}\geq m(a-1)(a^2+a+1)$$

Ta dễ dàng nhận ra đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a=b=c=1$.

Khi cho $a=1$ thì ta có thể dự đoán rằng $m=2$. Ta sẽ chứng minh rằng với $m=2$ thì bất đẳng thức phụ trên là đúng. Thật vậy

$$\frac{4}{a}+5a^2\geq 7+2a^3\Leftrightarrow\frac{(a-1)^2(-2a^2+a+4)}{a}\geq 0$$

Do $a\leq\sqrt[3]{3}\Rightarrow -2a^2+a+4\geq 0$. Vậy bất đẳng thức phụ trên là đúng.

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a=b=c=1$.

Bài toán 5.

Cho $a_1,a_2,...,a_n$ là các số thực không âm thỏa mãn $\sum_{i=1}^{n}a_i=n$. Chứng minh rằng

$$\sum_{i=1}^{n}\frac{a_i}{3a_i^2+5}\leq\frac{n}{8}$$

Chứng minh. Ta sẽ tìm hệ số m sao cho

$$\frac{a_i}{3a_i^2+5}\leq\frac{1}{8}+m(a_i-1)\Leftrightarrow\frac{(5-3a_i)(a_i-1)}{8(3a_i^2+5)}\leq m(a_i-1)$$

Ta dự đoán rằng với $m=\frac{1}{32}$ thì bất đẳng thức phụ trên là đúng. Thật vậy:

$$\frac{a_i}{3a_i^2+5}\leq\frac{1}{8}+\frac{(a_i-1)}{32}\Leftrightarrow 0\leq\frac{(5+a_i)(a_i-1)^2}{32(3a_i^2+5)}$$

Điều này hiển nhiên đúng. Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi các biến bằng nhau và bằng 1.

Nhận xét. Qua các bài toán trên ta có thể thấy rằng bất đẳng thức không hề quan tâm đến số biến. Ta hoàn toàn có thể tổng quát với n biến mà không làm ảnh hưởng đến cách giải. Đây là một điểm thú vị của ***U.C.T***.

Một cách tổng quát ta đưa ra cách giải quyết cho lớp bài toán có dạng sau

Bài toán tổng quát

Cho các số thực không âm $a_1,a_2,...,a_n$ thỏa mãn

$$h(a_1)+h(a_2)+...+h(a_n)=0$$

Chứng minh rằng

$$f(a_1)+f(a_2)+...+f(a_n)\geq 0$$

Lớp bài toán này có thể được giải quyết bằng cách phân tách để chứng minh theo từng biến. Vì các biểu thức mang tính đối xứng với nhau nên thường thì điểm cực trị đạt được tại các biến bằng nhau. Ta sẽ phải xác định hệ số m sao cho

$$f(a_i) \geq m \times h(a_i)$$

Đúng với mọi biến thỏa mãn điều kiện đặt ra. Với cách giải này ta sẽ giải quyết được một lượng lớn các bất đẳng thức mà các biến không ràng buộc lẫn nhau một cách "mật thiết". Thường là một số dạng điệu kiện như $\sum_{i=1}^{n} a_i^k = n$. Có thể khái quát tư tưởng của kỹ thuật này trong lớp bài toán trên như sau: Để chứng minh bài toán ta sẽ xác định hệ số trong các bất đẳng thức phụ theo từng biến riêng biệt sao cho

$$f(a_i) \geq m \times h(a_i) \Leftrightarrow g(a_i)^{2k} p(a_i) \geq 0$$

Trong đó $g(a_i) = (a_i - x_k)$ với x_k là điểm cực trị của bất đẳng thức.

Bài toán sẽ được giải quyết nếu $p(a_i) \geq 0$. Trong trường hợp $p(a_i) \geq 0$ chỉ đúng trong một miền nghiệm nào đó thì ta sẽ tiến hành chia trường hợp để giải quyết bài toán. Tuy nhiên trong phần 1 này ta sẽ không đề cấp đến những bài toán như vậy mà sẽ đề cập ở phần sau.

Sau khi đã tìm ra bất đẳng thức phụ. Với nhiều công cụ như đạo hàm, khảo sát hàm số hay đơn giản chỉ là phân tích nhân tử ta đều có thể giải quyết không quá khó khăn.

Trong phép chứng minh cho các bất đẳng thức phụ ở trên ta biến đổi và qui về việc phân tích nhân tử của đa thức $a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + ... a_2 x^2 + a_1 x + a_0$

Mà mục đích chủ đạo là qui về dạng tổng các bình phương. Việc nhân tích đa thức thành nhân tử là một vấn đề Đại số cơ bản nên xin không nêu ra ở đây.

Qua một vài ví dụ nho nhỏ hẳn phần nào các bạn đã hiểu được ***U.C.T***. Ở các phần tiếp theo việc xác định hệ số sẽ được trình bày một cách sơ lược bởi vì những bài toán đó mang tính phức tạp nhiều hơn mà ***U.C.T*** chỉ đơn thuần là bước đệm để đi đến lời giải chứ không thể đưa ta cách chứng minh trực tiếp .

Phần 3. Kĩ thuật chuẩn hóa và *U.C.T*

Bây giờ chúng ta sẽ bước sang một khoảng không gian mới với lớp bất đẳng thức thuần nhất đối xứng ba biến và kĩ thuật chuẩn hóa kết hợp với ***U.C.T***.

Đa thức $f(a,b,c)$ đối xứng định nghĩa dưới dạng: $f(a,b,c) = f'(a',b',c')$ trong đó (a',b',c') là một hoán vị tùy ý của (a,b,c). Hay nói cách khác là

$$f(a,b,c) = f(b,c,a) = f(c,a,b)$$

Tính thuần nhất của một đa thức đối xứng ba biến trên miền D có nghĩa là $f(ka,kb,kc) = k^n f(a,b,c)$ với mọi $k,a,b,c \in D, n = \text{const}$ chỉ phụ thuộc vào hàm $f(a,b,c)$. Hiểu một cách đơn giản đa thức thuần nhất nếu nó là tổng của các đơn thức đồng bậc. Do một số tính chất của hàm thuần nhất ta có thể chuẩn hóa điều kiện của biến để đơn giản hóa việc chứng minh. Ta có thể chuẩn hóa một đa thức thuần nhất đối xứng ba biến bằng cách đặt $a^n + b^n + c^n = k, abc = p, ab + bc + ca = r, ...$ Đây là kỹ thuật rất quan trọng giúp ta đơn giản hóa và qui bất đẳng thức về chứng minh theo từng biến. Hãy cùng đến với một số bất đẳng thức thuần nhất đối xứng ba biến để thấy công dụng của ***U.C.T***

Bài toán 6. [Bất đẳng thức Nesbit]

Cho a,b,c là các số thực không âm. Chứng minh rằng

$$\frac{a}{b+c}+\frac{b}{c+a}+\frac{c}{a+b}\ge\frac{3}{2}$$

Chứng minh. Không mất tính tổng quát chuẩn hóa $a+b+c=3$.

Bài toán qui về việc chứng minh

$$\frac{a}{3-a}+\frac{b}{3-b}+\frac{c}{3-c}\ge\frac{3}{2}$$

Ta cần chứng minh bất đẳng thức

$$\frac{a}{3-a}\ge\frac{1}{2}+m(a-1)\Leftrightarrow\frac{3(a-1)}{2(3-a)}\ge m(a-1)$$

Dễ dàng dự đoán $m=\frac{3}{4}$. Ta chứng minh bất đẳng thức với m như vậy thì luôn đúng

$$\frac{a}{3-a}\ge\frac{3a-1}{4}\Leftrightarrow\frac{3(a-1)^2}{4(3-a)}\ge 0$$

Điều này hiển nhiên đúng.

Sử dụng tương tự với các biến còn lại. Cộng vế theo vế ta có điều phải chứng minh. Đẳng thức xảy ra khi $a=b=c$.

Nhận xét. bất đẳng thức Nesbit là một bất đẳng thức đại số cơ bản và có nhiều phép chứng minh. Lời giải trên là một lời giải đẹp và ngắn gọn cho bất đẳng thức này.

Bài toán 7. [Võ Quốc Bá Cẩn]

Cho a,b,c là các số thực không âm. Chứng minh rằng

$$\frac{(b+c-a)^2}{2a^2+(b+c)^2}+\frac{(a+c-b)^2}{2b^2+(a+c)^2}+\frac{(a+b-c)^2}{2c^2+(b+a)^2}\ge\frac{3(a^2+b^2+c^2)}{(a+b+c)^2}$$

Chứng minh. Chuẩn hóa $a+b+c=3$. Khi đó bất đẳng thức cần chứng minh tương đương với

$$\frac{2(3-2a)^2}{a^2-2a+3}+\frac{2(3-2b)^2}{b^2-2b+3}+\frac{2(3-2c)^2}{c^2-2c+3}\ge a^2+b^2+c^2$$

Ta cần xác định hệ số m để bất đẳng thức sau là đúng

$$\frac{2(3-2a)^2}{a^2-2a+3}\ge a^2+m(a-1)$$

Ta lại có

$$\frac{2(3-2a)^2}{a^2-2a+3}-a^2=-\frac{(a-1)(a+3)(a^2-4a+6)}{a^2-2a+3}$$

Từ đây dễ dàng dự đoán với $m=-6$ thì bất đẳng thức phụ trên là đúng. Thật vậy

$$\frac{2(3-2a)^2}{a^2-2a+3}\ge a^2-6(a-1)\Leftrightarrow\frac{(a-1)^2(6-a)a}{a^2-2a+3}\ge 0$$

Điều này hiển nhiên đúng do $a\in(0,3)$.

Tương tự với các biến còn lại. Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a=b=c$.

Bài toán 8. [Đề thi Olympic 30-4, khối 11, lần XII – 2006]

Cho a,b,c là các số thực dương. Chứng minh rằng

$$\frac{a(b+c)}{(b+c)^2+a^2}+\frac{b(c+a)}{(c+a)^2+b^2}+\frac{c(a+b)}{(a+b)^2+c^2}\le\frac{6}{5}$$

Chứng minh. Không mất tính tổng quát, chuẩn hóa $a+b+c=3$. Ta có bất đẳng thức cần chứng minh tương đương với

$$\frac{a(3-a)}{9-6a+2a^2}+\frac{b(3-b)}{9-6b+2b^2}+\frac{c(3-c)}{9-6c+2c^2}\le\frac{6}{5}$$

Tương tự như trên ta dễ dàng tìm ra bất đẳng thức phụ sau:

$$\frac{a(3-a)}{9-6a+2a^2}\le\frac{21+9a}{25}\Leftrightarrow 0\le\frac{(a-1)^2(18a+9)}{25(9-6a+2a^2)}$$

Điều này hiển nhiên đúng. Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a=b=c$.

Nhận xét. Có thể thấy rằng hai lời giải cho các bài toán mở đầu phần 2 rất đơn giản và ngắn gọn. Đây cũng có thể xem là một kỹ thuật chính thống. Giúp ta giải quyết một số bài toán "cùng loại" và đã rất quen thuộc sau

Bài toán 9. [Darij Grinberg, Old and New Inequalities]

Cho a,b,c là các số thực dương. Chứng minh rằng

$$\frac{a}{(b+c)^2}+\frac{b}{(c+a)^2}+\frac{c}{(a+b)^2}\ge\frac{9}{4(a+b+c)}$$

Chứng minh. Không mất tính tổng quát, giả sử $a+b+c=3$. Bài toán cần chứng minh qui về dạng sau

$$\frac{a}{(3-a)^2}+\frac{b}{(3-b)^2}+\frac{c}{(3-c)^2}\ge\frac{3}{4}$$

Dễ dàng dự đoán bất đẳng thức phụ sau

$$\frac{a}{(3-a)^2}\ge\frac{2a-1}{4}\Leftrightarrow\frac{(a-1)^2(9-2a)}{4(3-a)^2}\ge 0$$

Điều này hiển nhiên đúng do $a\in[0,3)$.

Sử dụng bất đẳng thức này cho b,c rồi cộng lại, ta có đpcm.

Bài toán 10. [Phạm Văn Thuận, Mathlinks forum]

Cho a,b,c là các số thực dương. Chứng minh rằng

$$\frac{(b+c-3a)^2}{2a^2+(b+c)^2}+\frac{(a+c-3b)^2}{2b^2+(a+c)^2}+\frac{(a+b-3c)^2}{2c^2+(b+a)^2}\ge\frac{1}{2}$$

Chứng minh. Không mất tính tổng quát, chuẩn hóa $a+b+c=3$. Ta có bất đẳng thức cần chứng minh tương đương với

$$\frac{(3-4a)^2}{2a^2+(3-a)^2}+\frac{(3-4b)^2}{2b^2+(3-b)^2}+\frac{(3-4c)^2}{2c^2+(3-c)^2}\ge\frac{1}{2}$$

Sử dụng bất đẳng thức phụ sau

$$\frac{(3-4a)^2}{2a^2+(3-a)^2}\ge\frac{8a-7}{6}\Leftrightarrow\frac{(a-1)^2(39-8a)}{6(a^2-2a+3)}\ge 0$$

Điều này hiển nhiên đúng vì $0\le a\le 3\Rightarrow 39-8a\ge 39-24=15>0$.

Tương tự với các biến còn lại ta có điều phải chứng minh.

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a=b=c$.

Bài toán 11: [USAMO 2003]

Cho a,b,c là các số thực dương. Chứng minh rằng

$$\frac{(b+c+2a)^2}{2a^2+(b+c)^2}+\frac{(a+c+2b)^2}{2b^2+(a+c)^2}+\frac{(a+b+2c)^2}{2c^2+(b+a)^2}\le 8$$

Chứng minh. Không mất tính tổng quát, chuẩn hóa $a+b+c=1$. Khi đó ta có bất đẳng thức cần chứng minh tương đương với

$$\frac{(a+1)^2}{2a^2+(1-a)^2}+\frac{(b+1)^2}{2b^2+(1-b)^2}+\frac{(c+1)^2}{2c^2+(1-c)^2}\le 8$$

Sử dụng bất đẳng thức phụ sau

$$\frac{(a+1)^2}{2a^2+(1-a)^2}\le\frac{12a+4}{3}\Leftrightarrow 0\le\frac{(3a-1)^2(4a+1)}{2a^2+(1-a)^2}$$

Điều này hiển nhiên đúng. Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a=b=c$.

Phần 4. *U.C.T* và kỹ thuật phân tách các trường hợp

Ở các phần trên ta đã làm quen với một số bài toán khi đưa về dạng

$$f(a_i)\ge m\times h(a_i)\Leftrightarrow g(a_i)^{2k}p(a_i)\ge 0$$

Thì có ngay điều phải chứng minh. Tuy nhiên không phải bao giờ nó cũng xuất hiện $p(a_i)\ge 0$. Trong trường hợp $p(a_i)\ge 0$ chỉ đúng với một miền nghiệm nào đó thì việc chứng minh sẽ phải đi qua một chiều hướng khác, đó là xét thêm trường hợp biến a_i ngoài miền xác định để $p(a_i)\ge 0$. Thường thì bước này phức tạp và đòi hỏi người làm phải có những đánh giá mang sự tinh tế nhiều hơn. Chúng ta sẽ đến với một số bài toán tiêu biểu cho kỹ thuật này.

Bài toán 12.
Cho a,b,c là các số thực dương. Chứng minh rằng

$$\frac{a^2}{a^2+(b+c)^2}+\frac{b^2}{b^2+(a+c)^2}+\frac{c^2}{c^2+(b+a)^2}\ge\frac{3}{5}$$

Chứng minh. Không mất tính tổng quát chuẩn hóa $a+b+c=3$. Qui bất đẳng thức về dạng

$$\frac{a^2}{a^2+(3-a)^2}+\frac{b^2}{b^2+(3-b)^2}+\frac{c^2}{c^2+(3-c)^2}\ge\frac{3}{5}\Leftrightarrow\sum_{cyc}\frac{a^2}{2a^2-6a+9}\ge\frac{3}{5}$$

Ta sử dụng bất đẳng thức phụ sau

$$\frac{a^2}{2a^2-6a+9}\ge\frac{12a-7}{25}\Leftrightarrow(8a-21)(a-1)^2\ge 0$$

Không mất tính tổng quát giả sử $a\ge b\ge c\Rightarrow a\ge 1\ge c$.
Xét hai trường hợp sau

+ Trường hợp 1. $c\ge\frac{21}{8}\Rightarrow 8a-21\ge 8b-21\ge 8c-21\ge 0$.

+ Trường hợp 2. $\max\{a,b,c\}\le\frac{21}{8}$

Khi đó ta có:

$$f(a)=\frac{a^2}{2a^2-6a+9}=\frac{1}{1+\left(\frac{3}{a}-1\right)^2}\ge\frac{49}{50}>\frac{1}{5}$$

Do $f(a)$ đồng biến trên $(0,3]$ nên điều này hiển nhiên đúng.
Vậy bài toán được chứng minh. Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi ba biến bằng nhau.

Bài toán 13. [Vasile Cirtoaje - Algebraic Inequalities – Old and New Method]
Cho a,b,c,d là các số thực dương thỏa mãn $a+b+c+d=2$, Chứng minh rằng

$$\frac{1}{3a^2+1}+\frac{1}{3b^2+1}+\frac{1}{3c^2+1}+\frac{1}{3d^2+1}\geq\frac{16}{7}$$

Chứng minh. Ta cần xác định hệ số để bất đẳng thức sau là đúng

$$\frac{1}{3a^2+1}\geq\frac{4}{7}+m(2a-1)$$

Dễ dàng tìm ra bất đẳng thức phụ sau

$$\frac{1}{3a^2+1}\geq\frac{52-48a}{49}\Leftrightarrow\frac{3(2a-1)^2(12a-1)}{49(3a^2+1)}\geq 0$$

Tương tự với các biến còn lại.
Xét hai trường hợp sau đây
+ Trường hợp 1.

$$\min\{a,b,c,d\}\geq\frac{1}{12}\Rightarrow 12a-1\geq 12b-1\geq 12c-1\geq 12d-1\geq 0$$

+ Trường hợp 2.

$$d<\frac{1}{12}\Rightarrow 1+3d^2<\frac{49}{48}\Rightarrow\frac{1}{1+3d^2}>\frac{48}{49}$$

Xét tương tự với các biến còn lại ta tìm ra điều phải chứng minh.

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a=b=c=d=\frac{1}{2}$.

Bài toán 14. [Vasile Cirtoaje, Algebraic Inequalities – Old and New Method]
Cho a,b,c là các số thực dương thỏa mãn $a^2+b^2+c^2\geq 3$. Chứng minh rằng

$$\frac{a^5-a^2}{a^5+b^2+c^2}+\frac{b^5-b^2}{b^5+a^2+c^2}+\frac{c^5-c^2}{c^5+b^2+a^2}\geq 0$$

Chứng minh. Bất đẳng thức trên tương đương với

$$\frac{1}{a^5+b^2+c^2}+\frac{1}{b^5+a^2+c^2}+\frac{1}{c^5+b^2+a^2}\leq\frac{3}{a^2+b^2+c^2}$$

Từ đây suy ra ta chỉ cần chứng minh trường hợp $a^2+b^2+c^2=3$ là đủ.
Áp dụng bất đẳng thức *AM-GM* ta có

$$\frac{2a^6}{a^2+1}\leq\frac{2a^6}{2\sqrt{a^2}}=a^5$$

Đặt $a^2=x,b^2=y,c^2=z$ lúc đó ta có $x+y+z=3$ và do đó ta phải chứng minh

$$1\geq\frac{1}{\frac{2x^3}{x+1}-x+3}+\frac{1}{\frac{2y^3}{y+1}-y+3}+\frac{1}{\frac{2z^3}{z+1}-z+3}$$

$$\Leftrightarrow 1\geq\frac{x+1}{2x^3-x^2+2x+3}+\frac{y+1}{2y^3-y^2+2y+3}+\frac{z+1}{2z^3-z^2+2z+3}$$

$$\Leftrightarrow\sum_{cyc}\left(\frac{3-x}{6}-\frac{x+1}{2x^3-x^2+2x+3}\right)\geq 0$$

$$\Leftrightarrow\sum_{cyc}\left(\frac{(x-1)^2(-2x^2+3x+3)}{6(2x^3-x^2+2x+3)}\right)\geq 0$$

Không mất tính tổng quát giả sử $x \geq y \geq z \Rightarrow x \geq 1 \geq z$. Xét hai trường hợp

+ Trường hợp 1. $y+z \geq 1 \Rightarrow x \leq 2$ khi đó ta có

$$-2x^2+3x+3>0, -2y^2+3y+3>0, -2z^2+3z+3>0$$

Dẫn đến bài toán hiển nhiên đúng.

+ Trường hợp 2. $y+z \leq 1 \Rightarrow x \geq 2$ khi đó ta có

$$(2x^3-x^2+2x+3)-5(x+1)=2x^3-x^2-3x-2=x^3\left(2-\frac{1}{x}-\frac{3}{x^2}-\frac{2}{x^3}\right)$$

$$\geq x^3\left(2-\frac{1}{2}-\frac{3}{2^2}-\frac{2}{2^3}\right)=\frac{x^3}{2}>0$$

Từ đó suy ra $\dfrac{x+1}{2x^3-x^2+2x+3} \leq \dfrac{1}{5}$ như vậy ta cần chứng minh

$$\frac{z+1}{2z^3-z^2+2z+3}+\frac{y+1}{2y^3-y^2+2y+3} \leq \frac{4}{5}$$

Điều này luôn luôn đúng vì với $k \in [0,1]$ ta có

$$\frac{k+1}{2k^3-k^2+2k+3} \leq \frac{2}{5} \Leftrightarrow 4k^3 \geq (k+1)(2k-1)$$

Nếu $k \leq \dfrac{1}{2}$ thì bài toán được giải quyết.

Nếu $k \geq \dfrac{1}{2}$ thì ta có

$$4k^3-(k+1)(2k-1) \geq 4k^3-2(2k-1)=2(2k^3-2k+1)$$

$$\geq 2(k^2-2k+1)=2(k-1)^2 \geq 0$$

Từ $y+z \leq 1 \Rightarrow y,z \in [0,1]$.

Vậy bài toán được giải quyết hoàn toàn. Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a=b=c=1$.

Nhận xét. Đây là một kết quả "mạnh hơn" cho bài toán 3 trong kì thi IMO 2005 của tác giả Vasile Cirtoaje. Bài toán gốc ban đầu là với điều kiện $abc \geq 1$. Điều kiện của bài toán trên chặt hơn vì theo bất đẳng thức *AM-GM* ta có

$$a^2+b^2+c^2 \geq 3 \Rightarrow 3\sqrt[3]{(abc)^2} \geq 3 \Rightarrow abc \geq 1$$

Chúng ta hãy đến với lời giải của chính tác giả bài toán trên, được trích từ quyển "Algebraic Inequalities, Old and New Method"

Ta qui về việc chứng minh bài toán sau:

Cho a,b,c là các số thực dương thỏa mãn $a^2+b^2+c^2=3$. Chứng minh rằng

$$\frac{1}{a^5+3-a^2}+\frac{1}{b^5+3-b^2}+\frac{1}{c^5+3-c^2} \leq 1$$

Không mất tính tổng quát ta giả sử $a \geq b \geq c \geq 0$. Xét hai trường hợp sau

+ Trường hợp 1. $a \leq \sqrt{2} \Rightarrow a,b \leq \sqrt{2}$. Ta sử dụng các bất đẳng thức phụ sau

$$\frac{1}{a^5+3-a^2} \leq \frac{3-a^2}{6}, \frac{1}{b^5+3-b^2} \leq \frac{3-b^2}{6}, \frac{1}{c^5+3-c^2} \leq \frac{3-c^2}{6}$$

Lại có

$$\frac{1}{a^5+3-a^2}-\frac{3-a^2}{6}=\frac{(a-1)^2(a^5+2a^4-3a^2-6a-3)}{6(a^5+3-a^2)}$$

Mặt khác

$$a^5+2a^4-3a^2-6a-3=a^2\left(a^3+2a^2-3-\frac{6}{a}-\frac{3}{a^2}\right)$$
$$\le a^2\left(2\sqrt{2}+4-3-3\sqrt{2}-\frac{3}{2}\right)=-a^2\left(\frac{1}{2}+\sqrt{2}\right)<0$$
+ Trường hợp 2. $a>\sqrt{2}, a^2+b^2+c^2=3 \Rightarrow b^2+c^2<1$ khi đó ta có
$$\frac{1}{a^5+3-a^2}+\frac{1}{b^5+3-b^2}+\frac{1}{c^5+3-c^2}<\frac{1}{a^5+3-a^2}+\frac{1}{3-b^2}+\frac{1}{3-c^2}$$
Lại có
$$\frac{1}{a^5+3-a^2}<\frac{1}{2\sqrt{2}a^2+3-a^2}=\frac{1}{(2\sqrt{2}-1)a^2+3}<\frac{1}{(2\sqrt{2}-1)2+3}<\frac{1}{6}$$
Như vậy bài toán sẽ được giải quyết nếu
$$\frac{1}{3-b^2}+\frac{1}{3-c^2}\le\frac{5}{6}$$
Thật vậy
$$\frac{1}{3-b^2}+\frac{1}{3-c^2}-\frac{5}{6}=\frac{9(b^2+c^2-1)-5b^2c^2}{6(3-b^2)(3-c^2)}\le 0$$
Như vậy bài toán được giải quyết. Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a+b+c=1$.
Lời giải của tác giả Vasile Cirtoaje ngay từ đầu cũng đã sử dụng ***U.C.T*** nhưng nó lại đưa ta đến cách xét trường hợp khá lẻ vì phải so sánh biến với $\sqrt{2}$. Đây là một bài toán đẹp với nhiều mở rộng thú vị.

Bài toán 15. [Võ Quốc Bá Cẩn]
Tìm hằng số k tốt nhất để bất đẳng thức sau đúng với mọi $a,b,c\ge 0$
$$\sqrt{\frac{a^3}{ka^2+(b+c)^2}}+\sqrt{\frac{b^3}{kb^2+(c+a)^2}}+\sqrt{\frac{c^3}{kc^2+(a+b)^2}}\le\sqrt{\frac{3(a+b+c)}{k+4}}$$
Chứng minh. Cho $a=b=1, c=0$ ta được $k\ge 5$. Ta sẽ chứng minh rằng 5 chính là giá trị cần tìm, tức là qui về chứng minh
$$\sqrt{\frac{a^3}{5a^2+(b+c)^2}}+\sqrt{\frac{b^3}{5b^2+(c+a)^2}}+\sqrt{\frac{c^3}{5c^2+(a+b)^2}}\le\sqrt{\frac{(a+b+c)}{3}}$$
Sử dụng bất đẳng thức Cauchy-Schwarz, ta có
$$\left(\sum_{cyc}\sqrt{\frac{a^3}{5a^2+(b+c)^2}}\right)^2\le(a+b+c)\left(\sum_{cyc}\frac{a^2}{5a^2+(b+c)^2}\right)$$
Ta cần chứng minh
$$\sum_{cyc}\frac{a^2}{5a^2+(b+c)^2}\le\frac{1}{3}$$
Không mất tính tổng quát ta chuẩn hóa $a+b+c=1$ và $a\ge b\ge c\ge 0$ suy ra $a\ge\frac{1}{3}\ge c\ge 0$.
Bất đẳng thức cần chứng minh tương đương với
$$\frac{a^2}{6a^2-2a+1}+\frac{b^2}{6b^2-2b+1}+\frac{c^2}{6c^2-2c+1}\le\frac{1}{3}$$
Ta phải xét hai trường hợp
+ Trường hợp 1. $c\ge\frac{1}{8}$ ta có

$$9-\sum_{cyc}\frac{27a^2}{6a^2-2a+1}=\sum_{cyc}\left(12a-1-\frac{27a^2}{}\right)=\sum_{cyc}\frac{(3a-1)^2(8a-1)}{6a^2-2a+1}\geq 0$$

+ Trường hợp 2. $c\leq\frac{1}{8}$ ta có

$$\frac{6a^2}{6a^2-2a+1}+\frac{6b^2}{6b^2-2b+1}+\frac{6c^2}{6c^2-2c+1}-2=\frac{2a-1}{6a^2-2a+1}+\frac{2b-1}{6b^2-2b+1}+\frac{6c^2}{6c^2-2c+1}$$
$$=\frac{a-b-c}{6a^2-2a+1}+\frac{b-c-a}{6b^2-2b+1}+\frac{6c^2}{6c^2-2c+1}$$
$$=\frac{2(a-b)^2(3c-2)}{(6a^2-2a+1)(6b^2-2b+1)}+c\left(\frac{6c}{6c^2-2c+1}-\frac{1}{6a^2-2a+1}-\frac{1}{6b^2-2b+1}\right)$$

Ta cần chứng minh

$$\frac{6c}{6c^2-2c+1}\leq\frac{1}{6a^2-2a+1}+\frac{1}{6b^2-2b+1}$$

Vì $c\leq\frac{1}{8}$ nên $\frac{6c}{6c^2-2c+1}\leq 1$ vậy nên ta sẽ chứng minh bất đẳng thức sau

$$1\leq\frac{1}{6a^2-2a+1}+\frac{1}{6b^2-2b+1}$$

Nếu $b\leq\frac{1}{3}$ khi đó

$$1\leq\frac{1}{6b^2-2b+1}$$

Nếu $b\geq\frac{1}{3}$, áp dụng bất đẳng thức *Cauchy-Schwarz*, ta chỉ cần chứng minh

$$4\geq 6(a^2+b^2)-2(a+b)+2$$

Điều này tương đương với

$$\left[2(a+b)+c\right](a+b+c)\geq 3(a^2+b^2)$$

Từ giả thiết $b\geq\frac{1}{3}\Rightarrow 3b\geq a$ do đó

$$\left[2(a+b)+c\right](a+b+c)\geq 2(a+b)^2=3(a^2+b^2)+4ab-a^2+b^2$$
$$\geq 3(a^2+b^2)+a(3b-a)\geq 3(a^2+b^2)$$

Như vậy bài toán đã được chứng minh. Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a=b=c$ hoặc $a=b,c=0$ và các hoán vị. Hằng số k tốt nhất cần tìm là 5.

Bài toán 16. [Nguyễn Văn Thạch]

Cho các số dương a,b,c thỏa $a+b+c=3$, chứng minh bất đẳng thức

$$\frac{1}{\sqrt{a^2-3a+3}}+\frac{1}{\sqrt{b^2-3b+3}}+\frac{1}{\sqrt{c^2-3c+3}}\leq 3$$

Chứng minh. Không mất tính tổng quát, giả sử $a\geq b\geq c>0$.

Với mọi $x\geq\frac{\sqrt{5}-1}{2}$, ta có

$$\frac{2}{\sqrt{x^2-3x+3}}\leq x+1$$

Thật vậy, bất đẳng thức tương đương

$$(x-1)^2(x^2+x-1)\geq 0 \text{ (ñuùng)}$$

Từ đây, suy ra

+, Nếu $c\geq \dfrac{\sqrt{5}-1}{2}$, sử dụng bất đẳng thức trên, ta có đpcm.

+, Nếu $c\leq \dfrac{\sqrt{5}-1}{2}$, có 2 khả năng xảy ra

++, Nếu $b\leq 1$, ta có

$$a^2-3a+3=\left(a-\frac{3}{2}\right)^2+\frac{3}{4}\geq \frac{3}{4}$$

$$b^2-3b+3=(b-1)^2-b+2\geq 1$$

$$c^2-3c+3=(1-c)^2-c+2\geq \left(1-\frac{\sqrt{5}-1}{2}\right)^2-\frac{\sqrt{5}-1}{2}+2=\frac{16}{\left(\sqrt{5}+1\right)^2}$$

Do đó

$$VT\leq \frac{2}{\sqrt{3}}+\frac{\sqrt{5}+1}{2}+1<3$$

++, Nếu $b\geq 1$, suy ra $2\geq a\geq b\geq 1$, xét hàm số $f(x)=\dfrac{1}{\sqrt{x^2-3x+3}}$ với $1\leq x\leq 2$, ta có

$$f''(x)=\frac{8x^2-24x+15}{4(x^2-3x+3)^{5/2}}<0$$

Suy ra $f(x)$ là hàm lõm, do đó theo bất đẳng thức Jensen,

$$f(a)+f(b)\leq 2f\left(\frac{a+b}{2}\right)=2f(t)=\frac{2}{\sqrt{t^2-3t+3}}$$

Ta phải chứng minh

$$\frac{2}{\sqrt{t^2-3t+3}}+\frac{1}{\sqrt{(3-2t)^2-3(3-2t)+3}}\leq 3$$

Hay

$$\frac{2}{\sqrt{t^2-3t+3}}+\frac{1}{\sqrt{4t^2-6t+3}}\leq 3$$

Hay

$$\frac{36(t-1)^2(36t^6-252t^5+749t^4-1202t^3+1099t^2-546t+117)}{(t^2-3t+3)^2(4t^2-6t+3)^2}\geq 0$$

Dễ dàng kiểm tra được bất đẳng thức này đúng, vậy ta có đpcm. Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a=b=c=1$.

Bài toán 17. [Mở rộng từ Poland 1996]

Cho a,b,c là các số thực thỏa mãn $a+b+c=1$. Chứng minh rằng

$$\frac{a}{a^2+1}+\frac{b}{b^2+1}+\frac{c}{c^2+1}\leq \frac{9}{10}$$

Chứng minh. Không mất tính tổng quát giả sử $a\geq b\geq c \Rightarrow a\geq \dfrac{1}{3}\geq c$. Xét hai trường hợp sau:

+ Trường hợp 1. $c \ge -\frac{3}{4}$ ta có

$$\frac{9}{10} - \left(\frac{a}{a^2+1} + \frac{b}{b^2+1} + \frac{c}{c^2+1}\right) = \sum_{cyc}\left(\frac{18a}{25} + \frac{5}{30} - \frac{a}{a^2+1}\right) = \sum_{cyc}\frac{(3a-1)^2(4a+3)}{50(a^2+1)} \ge 0$$

+ Ttrường hợp 2. $c \le -\frac{3}{4}$ áp dụng bất đẳng thức *AM-GM*, ta có

$$\frac{a}{a^2+1} + \frac{b}{b^2+1} \le 1$$

Khi đó nếu $\frac{c}{c^2+1} \le -\frac{9}{10} \Leftrightarrow -5-2\sqrt{6} \le c \le -\frac{3}{4}$ ta có ngay điều phải chứng minh.

Xét trường hợp: $-5-2\sqrt{6} \ge c$ khi đó ta có $3+\sqrt{6} \le a \Rightarrow \frac{a}{a^2+1} \le \frac{1}{5}$. Từ đây suy ra:

$$\frac{a}{a^2+1} + \frac{b}{b^2+1} + \frac{c}{c^2+1} \le \frac{a}{a^2+1} + \frac{b}{b^2+1} \le \frac{1}{5} + \frac{1}{2} = \frac{7}{10} < \frac{9}{10}$$

Vậy bất đẳng thức được chứng minh. Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a = b = c = \frac{1}{3}$.

Nhận xét. Bài toán gốc của đề toán này là với điều kiện của trường hợp 1. Tuy nhiên bài toán vẫn đúng với mọi số thực, đây là một điều rất lí thú. Có thể chứng minh bài toán trên với kỹ thuật dồn biến bằng hàm lồi.

Phần 5. Kết hợp bất đẳng thức *Vornicu Schur* với *U.C.T*

Trong phần này chúng tôi sẽ giới thiệu đến các bạn việc kết hợp ***U.C.T*** với bất đẳng thức *Vornicu Schur*. Có thể nói rằng khi ta kết hợp nhuần nhuyễn hai kỹ thuật trên thì sẽ nhận được những lời giải khá ấn tượng và đẹp mắt. Trước hết hãy cùng đến với dạng phát biểu, các định lí cũng như kỹ thuật phân tích về chính tắc của bất đẳng thức *Vornicu Schur*.

Bất đẳng thức Vornicu Schur:

Cho $a \ge b \ge c$ *và* $A, B, C \ge 0$ *khi đó bất đẳng thức*

$$A(a-b)(a-c) + B(b-c)(b-a) + C(c-a)(c-b) \ge 0$$

Là đúng khi và chỉ khi

Định lí 1. $A \ge B$ *hoặc* $C \ge B$

Định lí 2. $A \times a \ge B \times b$

Định lí 3. $B \times c \ge C \times b$ *(Nếu a,b,c là ba cạnh của một tam giác)*

Định lí 4. $\sqrt{A} + \sqrt{C} \ge \sqrt{B}$

Khi đã nắm trong tay các định lí về bất đẳng thức *Vornicu Schur* thì chắc hẳn bạn sẽ phải chú ý đến cách biến đổi sao cho qui về dạng chính tắc của nó. Ở đây xin nêu ra 2 phép biến đổi cực kì hiệu quả và có công dụng lớn trong nhiều bài toán, giúp bạn có thể đưa bài toán từ dạng tổng các bình phương về dạng trên.
Trước hết hãy biến đổi đưa bài toán về hai dạng quen thuộc sau

Dạng 1.

$$A(a-b)^2 + B(b-c)^2 + C(c-a)^2 \ge 0$$

Dạng 2.

$$A(2a-b-c)^2 + B(2b-c-a)^2 + C(2c-a-b)^2 \ge 0$$

Tiếp tục thực hiện phép biến đổi sau

$$A(a-b)^2+B(b-c)^2+C(c-a)^2$$
$$=A(a-b)(a-c+c-b)+B(b-c)(b-a+a-c)+C(c-a)(c-b+b-a)$$
$$=\sum_{cyc}A(a-b)(a-c)+\sum_{cyc}A(b-c)(c-a)=\sum_{cyc}(A+B)(a-b)(a-c)$$

Dạng 1 là dạng phân tích chính tắc của phương pháp *S.O.S* một phương pháp đã lấy làm quen thuộc với nhiều người. Từ phép phân tích trên ta có thể thấy rằng mối liên hệ giữa phương pháp *S.O.S* và bất đẳng thức *Vornicu Schur* là rất mật thiết. Tuy nhiên trong bài viết này không đề cập đến vấn đề này mà chúng ta sẽ xem xét dạng 2 ở trên. Vì tính ứng dụng của nó trong ***U.C.T*** là nhiều hơn và nó cũng là một sự kết hợp mang nhiều ý nghĩa.

$$A(2a-b-c)^2+B(2b-c-a)^2+C(2c-a-b)^2$$
$$=2\sum_{cyc}A(a-b)(a-c)+\sum_{cyc}A(a-b)^2+\sum_{cyc}A(c-a)^2$$
$$=2\sum_{cyc}A(a-b)(a-c)+\sum_{cyc}(A+B)(a-b)^2$$
$$=2\sum_{cyc}A(a-b)(a-c)+\sum_{cyc}(2A+B+C)(a-b)(a-c)$$
$$=2\sum_{cyc}(4A+B+C)(a-b)(a-c)$$

Hãy mở đầu bằng một bài toán trông có vẻ đơn giản nhưng cũng không quá dễ để tìm ra lời giải nếu không chọn đúng đường đi.

Bài toán 18. [Vasile Cirtoaje]

Cho a,b,c là các số thực không âm thỏa mãn $a+b+c=3$. Chứng minh rằng

$$3(a^4+b^4+c^4)+a^2+b^2+c^2+6\ge 6(a^3+b^3+c^3)$$

Chứng minh. Theo ***U.C.T*** dễ dàng tìm ra bất đẳng thức phụ sau

$$3a^4+a^2+2\ge 3a^3-4a+4\Leftrightarrow (a-1)^2(3a^2-2)\ge 0$$

Ta qui bài toán về chứng minh

$$\sum_{cyc}(a-1)^2(3a^2-2)\ge 0$$

Thật vậy

$$\sum_{cyc}(a-1)^2(3a^2-2)\ge 0$$
$$\Leftrightarrow\sum_{cyc}(3a-3)^2(3a^2-2)\ge 0$$
$$\Leftrightarrow\sum_{cyc}(3a-a-b-c)^2(3a^2-2)\ge 0$$
$$\Leftrightarrow\sum_{cyc}(2a-b-c)^2(3a^2-2)\ge 0$$
$$\Leftrightarrow\sum_{cyc}(4a^2+b^2+c^2-4)(a-b)(a-c)\ge 0$$

Không mất tính tổng quát giả sử $a\ge b\ge c$ khi đó ta có

$$4a^2+b^2+c^2-4\ge 4b^2+a^2+c^2-4\ge 4c^2+b^2+a^2-4$$

Lại có

$$4c^2+a^2+b^2-4\ge 4c^2+\frac{(a+b)^2}{2}-4=4c^2+\frac{(3-c)^2}{2}-4=\frac{(3c-1)^2}{2}\ge 0$$

Theo định lí 1 ta có điều phải chứng minh. Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a=b=c=1$ hoặc $(a,b,c)=\left(\frac{4}{3},\frac{4}{3},\frac{1}{3}\right)$.

Nhận xét. Bài toán sẽ được giải quyết trong trường hợp $3a^2-2\ge 0 \Leftrightarrow a\ge\sqrt{\frac{2}{3}}$. Trường hợp còn lại $a\le\sqrt{\frac{2}{3}}$ rõ ràng sẽ khó giải quyết vì vế phải của điều kiện trong trường hợp 2 khá lẻ, nhiều khả năng sẽ dẫn đến những tính toán lằng nhằng không cần thiết. Tuy nhiên cần chú ý một điều là đẳng thức của bài toán này xảy ra tại hai điểm cực trị vì vậy không thể áp dụng mỗi ***U.C.T*** vì dạng phát biểu của kỹ thuật này sẽ cho ta duy nhất một điểm cực trị cần tìm. Như vậy việc kết hợp giữa ***U.C.T*** và bất đẳng thức *Vornicu Schur* không đơn thuần là giải quyết bài toán một cách đẹp mắt mà còn hướng ta đến việc giải quyết trường hợp đẳng thức xảy ra khi có hai biến bằng nhau và khác biến còn lại.

Bài toán 19. [Nguyễn Thúc Vũ Hoàng]
Cho a,b,c là các số thực dương thỏa mãn $a+b+c=3$. Chứng minh rằng
$$2(a^3+b^3+c^3)+9\ge 5(a^2+b^2+c^2)$$
Chứng minh. Ta cần xác định hệ số cho bất đẳng thức phụ sau:
$$2a^3+3\ge 5a^2+m(a-1)\Leftrightarrow (a-1)(2a^2-3a-3)\ge m(a-1)$$
Từ đây ta sẽ dự đoán $m=-4$ ta có
$$2a^3+3\ge 5a^2-4a+4\Leftrightarrow (a-1)^2(2a-1)\ge 0$$
Tương tự với các biến còn lại ta có bất đẳng thức cần chứng minh tương đương với
$$2(a^3+b^3+c^3)+9\ge 5(a^2+b^2+c^2)$$
$$\Leftrightarrow (a-1)^2(2a-1)+(b-1)^2(2b-1)+(c-1)^2(2c-1)\ge 0$$
$$\Leftrightarrow (2a-b-c)^2(2a-1)+(2b-c-a)^2(2b-1)+(2c-a-b)^2(2c-1)\ge 0$$
$$\Leftrightarrow 6a(a-b)(a-c)+6b(b-c)(b-a)+6c(c-a)(c-b)\ge 0$$
Không mất tính tổng quát giả sử $a\ge b\ge c$. Khi đó theo bất đẳng thức Vornicu Schur ta có điều phải chứng minh.

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a=b=c$ hoặc $a=0,b=c=\frac{3}{2}$ cùng các hoán vị.

Nhận xét. Lại một bài toán đơn giản nhưng điều thú vị ở bài toán này là đẳng thức đạt được tại 2 điểm. Nếu như giải một cách thông thường bằng ***U.C.T*** thì không thể giải quyết bài toán một cách triệt để và một lần nữa bất đẳng thức Vornicu Schur lại phát huy tác dụng của nó.

Bài toán 20. [Vasile Cirtoaje, Romania TST 2006]
Cho a,b,c là các số thực dương thỏa mãn $a+b+c=3$. Chứng minh rằng
$$\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}+\frac{1}{c^2}\ge a^2+b^2+c^2$$
Chứng minh.
Theo ***U.C.T*** dễ dàng tìm ra bất đẳng thức phụ sau
$$\frac{1}{a^2}+4a\ge a^2+4$$
Bài toán cần chứng minh tương đương với

$$\sum_{cyc}\frac{(a-1)^2(1+2a-a^2)}{a^2}\ge 0$$
$$\Leftrightarrow \sum_{cyc}\frac{(2a-b-c)^2(1+2a-a^2)}{a^2}\ge 0$$
$$\Leftrightarrow \sum_{cyc}(4A+B+C)(a-b)(a-c)\ge 0$$

Trong đó

$$A=\frac{1+2a-a^2}{a^2},B=\frac{1+2b-b^2}{b^2},C=\frac{1+2c-c^2}{c^2}$$

Không mất tính tổng quát giả sử $a\ge b\ge c$ khi đó ta có

$$A-B=\frac{1+2b-b^2}{b^2}-\frac{1+2a-a^2}{a^2}=\frac{(a-b)(2ab+a+b)}{a^2b^2}\ge 0$$

Từ đó suy ra

$$4C+A+B\ge 4B+A+C\ge 4A+B+C$$

Áp dụng bất đẳng thức *AM-GM* ta có

$$a+b+c=3\ge 3\sqrt[3]{abc}\Leftrightarrow 1\ge\sqrt[3]{abc}\Rightarrow\frac{3}{\sqrt[3]{abc}}\ge 3$$

Do đó

$$\begin{aligned}4A+B+C&=\frac{4}{a^2}+\frac{1}{b^2}+\frac{1}{c^2}+\frac{8}{a}+\frac{2}{b}+\frac{2}{c}-6\\&=\left(\frac{4}{a^2}+\frac{1}{b^2}+\frac{1}{c^2}+\frac{6}{a}\right)+2\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}-3\right)\\&\ge 2\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}-3\right)\ge 2\left(\frac{3}{\sqrt[3]{abc}}-3\right)\ge 2(3-3)=0\end{aligned}$$

Theo định lí 1 ta có điều phải chứng minh. Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a=b=c=1$.
Nhận xét. Ở bài toán này chúng ta vẫn có thể chia trường hợp để giải quyết. Dưới đây là lời giải của tác giả bài toán Vasile Cirtoaje
Sau khi đã đưa bài toán về dạng

$$\sum_{cyc}\frac{(a-1)^2(1+2a-a^2)}{a^2}\ge 0$$

Không mất tính tổng quát giả sử rằng $a\ge b\ge c$ khi đó áp dụng định lí về dấu của tam thức bậc 2 ta chia nhỏ bài toán thành hai trường hợp

+ Trường hợp 1. $a\le 1+\sqrt{2}\Rightarrow c\le b\le a\le 1+\sqrt{2}$ từ đó dẫn đến

$$1+2a-a^2\ge 0,1+2b-b^2\ge 0,1+2c-c^2\ge 0$$

+ Trường hợp 2. $a<1+\sqrt{2}\Rightarrow b+c=3-a<2-\sqrt{2}<\frac{2}{3}$ suy ra

$$bc\le\frac{(b+c)^2}{4}<\frac{1}{9}$$

Khi đó

$$\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}+\frac{1}{c^2}>\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}\ge\frac{2}{bc}>18>(a+b+c)^2>a^2+b^2+c^2$$

Bài toán được giải quyết. Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a=b=c=1$.
Còn nhiều lời giải bằng các kỹ thuật khác cho bất đẳng thức trên. Tuy nhiên khuôn khổ chuyên đề có hạn nên xin không nêu ra ở đây.

Phần 6. Một dạng biểu diễn thú vị

Ở đây chúng tôi muốn nói đến dạng biểu diễn theo tổng của 1. Đây là một tư tưởng tuy đơn giản nhưng sẽ giúp ta tìm ra nhiều lời giải ấn tượng. Bây giờ ta hãy chú ý đến đẳng thức sau đây

$$1=\frac{a^k+b^k+c^k}{a^k+b^k+c^k}=\frac{a^k}{a^k+b^k+c^k}+\frac{b^k}{a^k+b^k+c^k}+\frac{c^k}{a^k+b^k+c^k}$$

Đẳng thức tưởng chừng như là một điều hiển nhiên, không mang nhiều ý nghĩa nhưng lại có vai trò khá quan trọng trong việc chứng minh một lớp bất đẳng thức mà chúng tôi sẽ nêu ra dưới đây. Ở phần này kỹ thuật xác định hệ số không còn có thể thực hiện như trước bởi vì ở đây xuất hiện lũy thừa p. Nếu chỉ sử dụng những biến đổi thông thường thì sẽ phức tạp. Vì vậy công cụ mà chúng ta chọn ở đây sẽ là đạo hàm. Trước hết xin nhắc lại 2 định lí cơ bản sau đây

Định lí Fermat. Giả sử hàm số $f(x)$ xác định trên $[a,b]$ và có cực trị địa phương tại $x_0\in[a,b]$. Khi đó nếu f có đạo hàm tại x_0 thì $f^/(x_0)=0$

Định lí Roll. Giả sử $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ liên tục và khả vi trong (a,b). Nếu $f(a)=f(b)$ thì tồn tại $x_0\in(a,b)$ sao cho $f^/(x_0)=0$

Bài toán 21. [Võ Quốc Bá Cẩn]

Tìm hằng số $k>0$ tốt nhất để bất đẳng thức sau là đúng với mọi số a,b,c là các số thực dương

$$\frac{a}{\sqrt{ka^2+(b+c)^2}}+\frac{b}{\sqrt{kb^2+(c+a)^2}}+\frac{c}{\sqrt{kc^2+(a+b)^2}}\ge\frac{3}{\sqrt{k+4}}$$

Chứng minh. Cho $a=1,b=c=0$ ta có $k\le\frac{1}{2}$. Ta sẽ chứng minh đó là giá trị k tốt nhất để bất đẳng thức là đúng. Bất đẳng thức cần chứng minh.

$$\frac{a}{\sqrt{a^2+2(b+c)^2}}+\frac{b}{\sqrt{b^2+2(c+a)^2}}+\frac{c}{\sqrt{kc^2+(a+b)^2}}\ge 1$$

Ta sẽ phải xác định hệ số k sao cho bất đẳng thức sau là đúng

$$\frac{a}{\sqrt{a^2+2(b+c)^2}}\ge\frac{a^k}{a^k+b^k+c^k}$$

Ở đây ta chuẩn hóa $b=c=1$ để việc việc xác định hệ số được đơn giản hơn. Khi đó ta cần xác định hệ số k sao cho

$$\frac{a}{\sqrt{a^2+8}}\ge\frac{a^k}{a^k+2}\Leftrightarrow a^{k+2}-2a^{2k}+a^2\ge 0$$

Đặt $f(a)=a^{k+2}-2a^{2k}+a^2$. Lại có $f(a)\ge 0, f(1)=0$ nên theo định lí Fermat ta có $f^/(1)=0$. Tiến hành đạo hàm $f(a)$ suy ra

$$f^/(a)=(k+2)a^{k+1}-4ka^{2k-1}+2a$$

Theo trên thì ta có

$$f^/(1)=(k+2)-4k+2=0\Leftrightarrow k=\frac{4}{3}.$$

Như vậy ta sẽ dự đoán bất đẳng thức sau là đúng

$$\frac{a}{\sqrt{a^2+2(b+c)^2}} \ge \frac{\sqrt[3]{a^4}}{\sqrt[3]{a^4}+\sqrt[3]{b^4}+\sqrt[3]{c^4}}$$

Sau khi đã hoàn thành xong bước dự đoán chúng ta có nhiều con đường để lựa chọn. Thông thường thì phép biến đổi tương đương luôn mang lại hiệu quả nếu bất đẳng thức phụ là đúng. Nên nhớ rằng bất đẳng thức phụ trên chỉ là dự đoán mà thôi, có thể nó sẽ không đúng hoặc ngược lại. Từng bài toán ta sẽ "tùy cơ ứng biến". Tất nhiên nhiều bài toán không thể áp dụng theo cách này. Chúng ta tiếp tục quay lại bài toán trên với phép chứng minh cho bất đẳng thức phụ.

Theo bất đẳng thức Holder ta có $\sqrt[3]{b^4}+\sqrt[3]{c^4} \ge 2\sqrt[3]{\left(\frac{b+c}{2}\right)^4}$ từ đây ta sẽ phải chứng minh bất đẳng thức

$$\frac{a}{\sqrt{a^2+8t^2}} \ge \frac{\sqrt[3]{a^4}}{\sqrt[3]{a^4}+2\sqrt[3]{t^4}}$$

$$\Leftrightarrow \sqrt[3]{a^4}+2\sqrt[3]{t^4} \ge \sqrt[3]{a}\sqrt{a^2+8t^2}$$

$$\Leftrightarrow 4\sqrt[3]{t^4}(\sqrt[3]{a^2}-\sqrt[3]{t^2})^2 \ge 0$$

Ở đây $t=\frac{b+c}{2}$. Vậy bất đẳng thức này hiển nhiên đúng .

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a=b=c$ hoặc $a=t>0, b=c=0$ và các hoán vị.

Nhận xét. Quá trình tìm kiếm hệ số k có thể thông qua việc đánh giá theo bất đẳng thức *AM-GM* như sau

$$\frac{a}{\sqrt{a^2+8}} \ge \frac{a^k}{a^k+2} \Leftrightarrow a^{k+2}-2a^{2k}+a^2 \ge 0 \Leftrightarrow a^{k+2}+a^2 \ge 2a^{2k}$$

Mặt khác theo bất đẳng thức *AM-GM* thì $a^{k+2}+a^2 \ge 2\sqrt{a^{k+4}}$. Như vậy ta có cần xác định k sao cho

$$2\sqrt{a^{k+4}}=2a^{2k} \Leftrightarrow a^{k+4}=a^{4k} \Leftrightarrow k+4=4k \Leftrightarrow k=\frac{3}{4}$$

Bài toán 22. [IMO 2001]

Cho a,b,c là các số thực dương. Chứng minh rằng

$$\frac{a}{\sqrt{a^2+8bc}}+\frac{b}{\sqrt{b^2+8ca}}+\frac{c}{\sqrt{c^2+8ab}} \ge 1$$

Chứng minh. Bằng cách làm tương tự, ta thiết lập được bất đẳng thức sau

$$\frac{a}{\sqrt{a^2+8bc}} \ge \frac{a^{4/3}}{a^{4/3}+b^{4/3}+c^{4/3}}$$

Thật vậy, sử dụng bất đẳng thức *AM-GM*, ta có $b^{4/3}+c^{4/3} \ge 2b^{2/3}c^{2/3}=2t^{4/3}$, ta cần chứng minh

$$a^{4/3}+2t^{4/3} \ge a^{1/3}\sqrt{a^2+8t^2}$$

$$\Leftrightarrow 4t^{4/3}(a^{2/3}-t^{2/3})^2 \ge 0 \text{ (ñuùng)}$$

Do đó, bất đẳng thức trên đúng. Sử dụng tương tự cho b,c rồi cộng lại, ta có đpcm. Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a=b=c=1$ hoặc $b \to 0, c \to 0$.

Bài toán 23.

Cho a,b,c là các số thực không âm. Chứng minh rằng

$$\sqrt{\frac{a^3}{a^3+(b+c)^3}}+\sqrt{\frac{b^3}{b^3+(c+a)^3}}+\sqrt{\frac{c^3}{c^3+(a+b)^3}}\ge 1$$

Chứng minh. Tương tự như trên ta có xác định được bất đẳng thức phụ sau:

$$\sqrt{\frac{a^3}{a^3+(b+c)^3}}\ge\frac{a^2}{a^2+b^2+c^2}\quad (*)$$

Có thể chứng minh bất đẳng thức phụ trên theo nhiều cách:

Cách 1.

$$(*)\Leftrightarrow 2a^2(b^2+c^2)+(b^2+c^2)^2\ge a(b+c)^3$$

Điều này hiển nhiên đúng, thật vậy

$$2a^2(b^2+c^2)+(b^2+c^2)^2\ge a^2(b+c)^2+\frac{(b+c)^4}{4}\ge 2\sqrt{\frac{a^2(b+c)^6}{4}}=a(b+c)^3$$

Cách 2.

Theo bất đẳng thức *AM-GM* ta có

$$\sqrt{1+k^3}=\sqrt{(1+k)(1-k+k^2)}\le\frac{(1+k)+(1-k+k^2)}{2}=1+\frac{k^2}{2}$$

Áp dụng bất đẳng thức phụ trên ta có

$$\sqrt{\frac{a^3}{a^3+(b+c)^3}}\ge\frac{1}{\sqrt{1+\left(\frac{b+c}{a}\right)^3}}\ge\frac{1}{1+\frac{1}{2}\left(\frac{b+c}{a}\right)^2}\ge\frac{1}{1+\frac{b^2+c^2}{a^2}}=\frac{a^2}{a^2+b^2+c^2}$$

Áp dụng tương tự với các biến còn lại. Cộng vế theo vế ta có có điều phải chứng minh. Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi 3 biến bằng nhau hoặc có 2 biến dần về 0.

Bài toán 24. Cho a,b,c là các số thực dương. Chứng minh rằng

$$\frac{a^3}{a^3+(b+c)^3}+\frac{b^3}{b^3+(c+a)^3}+\frac{c^3}{c^3+(a+b)^3}\ge\frac{1}{3}$$

Chứng minh. Sử dụng bất đẳng thức *Cauchy-Schwarz*, ta có

$$VT\ge\frac{1}{3}\left(\sum_{cyc}\sqrt{\frac{a^3}{a^3+(b+c)^3}}\right)^2\ge\frac{1}{3}$$

Bất đẳng thức được chứng minh. Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a=b=c$.

Phần 7. Giải quyết một số bài toán mà điều kiện liên quan mật thiết đến nhau

Đa phần các bài toán xét đến ở trên đều có điều kiện mà các biến liên hệ với nhau ko quá chặt Thường là điều kiện ở dạng $a_1^k+a_2^k+...+a_{n-1}^k+a_n^k=n$. Tức là ta có thể tách ra theo từng biến để tìm bất đẳng thức phụ. Tuy nhiên với một số bài toán mà điều kiện thiết lập mối quan hệ "bền chặt" đại loại như $\left(\prod_{i=1}^{n}a_i\right)^k$ thì việc tìm ra bất đẳng thức phụ tương đối khó khăn vì ta không thể đánh giá theo từng biến nữa. Và để áp dụng ***U.C.T*** trong những bài toán như vậy chúng ta phải dùng đến một số tính chất của hàm số.

Bài toán 25.
Cho a,b,c là các số thực dương thỏa mãn $abc=1$. Chứng minh rằng

$$\frac{a\sqrt{b+c}}{b+c+1}+\frac{b\sqrt{c+a}}{c+a+1}+\frac{c\sqrt{a+b}}{a+b+1}\geq\sqrt{2}$$

Chứng minh. Áp dụng bất đẳng thức Holder ta có

$$\left(\frac{a\sqrt{b+c}}{b+c+1}+\frac{b\sqrt{c+a}}{c+a+1}+\frac{c\sqrt{a+b}}{a+b+1}\right)^2\left(\sum_{cyc}\frac{a(b+c+1)^2}{b+c}\right)\geq(a+b+c)^3$$

Do đó ta cần phải chứng minh

$$(a+b+c)^3\geq 2\sum_{cyc}\frac{a(b+c+1)^2}{b+c}$$

$$\Leftrightarrow\sum_{cyc}a^3+3\sum_{cyc}\frac{a}{b}+3\sum_{cyc}\frac{b}{a}+6\geq 4\sum_{cyc}ab+4\sum_{cyc}a+2\sum_{cyc}\frac{a}{b+c}$$

Áp dụng bất đẳng thức *AM-GM* ta có

$$\sum_{cyc}\frac{a}{b}\geq\sum_{cyc}ab,\sum_{cyc}\frac{b}{a}\geq\sum_{cyc}ab,2\sum_{cyc}\frac{a}{b+c}\leq\frac{1}{2}\sum_{cyc}\frac{a}{b}+\frac{1}{2}\sum_{cyc}\frac{b}{a}$$

Từ đó ta có

$$VT-VP\geq\sum_{cyc}a^3+\frac{5}{2}\sum_{cyc}\frac{a}{b}+\frac{5}{2}\sum_{cyc}\frac{b}{a}-4\sum_{cyc}ab-4\sum_{cyc}a+6$$

$$\geq\sum_{cyc}a^3+\sum_{cyc}ab-4\sum_{cyc}a+6=\sum_{cyc}\left(a^3-4a+\frac{1}{a}+2\right)$$

Xét hàm số $f(x)=x^3-4x+\frac{1}{x}+2+2\ln x$ với $x>0$ ta có

$$f'(x)=(x-1)\left(3x+3+\frac{1}{x^2}-\frac{1}{x}\right)$$

Nếu $x<1$ thì $\frac{1}{x^2}\geq\frac{1}{x}$, nếu $x\geq 1\Rightarrow 1>\frac{1}{x}$ do đó $f'(x)=0\Leftrightarrow x=1$
Từ đó dễ dàng kiểm tra rằng $f(x)\geq f(1)=0,\forall x>0$
Hay

$$x^3-4x+\frac{1}{x}+2\geq -2\ln x,\forall x>0$$

Như vậy ta có

$$\sum_{cyc}\left(a^3-4a+\frac{1}{a}+2\right)\geq -2\sum_{cyc}\ln a=0$$

Bài toán được giải quyết. Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a=b=c=1$.

Bài toán 26. [Lê Hữu Điền Khuê, THPT Quốc Học, Thành phố Huế]
Cho a,b,c là các số thực dương thỏa mãn $abc=1$. Chứng minh rằng

$$\frac{1}{3a^2+(a-1)^2}+\frac{1}{3b^2+(b-1)^2}+\frac{1}{3c^2+(c-1)^2}\geq 1$$

Chứng minh. Xét hai trường hợp sau

+ Trường hợp 1. Nếu trong ba số a,b,c tồn tại ít nhất một số không lớn hơn $\frac{1}{2}$. Giả sử số đó là a. Ta có $a\le\frac{1}{2}\Rightarrow 3a^2+(a-1)^2\le 1$. Khi đó bất đẳng thức hiển nhiên đúng.

+ Trường hợp 2. Cả ba số a,b,c đều không nhỏ hơn $\frac{1}{2}$ khi đó ta xét hàm số sau

Giống như các phần trước ta có cũng sẽ thiết lập một bất đẳng thức phụ dạng

$$\frac{1}{3x^2+(x-1)^2}\ge\frac{1}{3}+k\ln x$$

Ở đây ta có qui về hàm số mũ và chú ý $\ln x+\ln y+\ln z=0$.

Tiếp tục quan sát thấy đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a=b=c=1$. Từ đó ta có phải xác định k sao cho $f'(1)=0$.

$$f(x)=\frac{1}{3x^2+(x-1)^2}+\frac{2}{3}\ln x-\frac{1}{3}$$

Với $x>\frac{1}{2}$. Khi đó ta có

$$f'(x)=\frac{2(16x^4-16x^3-x+1)}{3x(4x^2-2x+1)^2}=\frac{2(x-1)(16x^3-1)}{3x(4x^2-2x+1)^2}$$

Từ đây suy ra $f'(x)=0\Leftrightarrow x=1$, do $x>\frac{1}{2}$

Dễ dàng kiểm tra được $f(x)\ge f(1)=0,\forall x>\frac{1}{2}$. Điều này tương đương với

$$\frac{1}{3x^2+(x-1)^2}\ge\frac{1}{3}-\frac{2}{3}\ln x,\forall x>\frac{1}{2}$$

Sử dụng bất đẳng thức phụ trên theo từng biến a,b,c rồi cộng vế theo vế ta có

$$\frac{1}{3a^2+(a-1)^2}+\frac{1}{3b^2+(b-1)^2}+\frac{1}{3c^2+(c-1)^2}\ge 1-\frac{2}{3}\sum_{cyc}\ln a=1$$

Bất đẳng thức được chứng minh. Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a=b=c=1$, hoặc $a\to\infty,b\to\infty,c\to 0^+$ và các hoán vị.

Nhận xét. Bài toán trên còn một lời giải rất ấn tượng của Vasile Cirtoaje. Xin trình bày lại lời giải đó. Sử dụng bất đẳng thức phụ sau đây

$$\frac{1}{3a^2+(a-1)^2}\ge\frac{1}{2a^3+1}\Leftrightarrow\frac{2a(a-1)^2}{(4a^2-2a+1)(2a^3+1)}\ge 0$$

Điều này hiển nhiên đúng với mọi số thực không âm. Tương tự với các biến còn lại suy ra điều phải chứng minh.

Bài toán 27. [Gabriel Dospinescu]

Cho $a_1,a_2,...,a_n$ là các số thực dương thỏa mãn $a_1a_2...a_n=1$. Chứng minh rằng

$$\sqrt{a_1^2+1}+\sqrt{a_2^2+1}+...+\sqrt{a_n^2+1}\le\sqrt{2}(a_1+a_2+...+a_n)$$

Chứng minh. Xét hàm số sau với $x>0$

$$f(x)=\sqrt{x^2+1}-2\sqrt{x}+\left(\sqrt{2}-\frac{1}{\sqrt{2}}\right)\ln x$$

Khi đó ta có

$$f'(x)=\frac{(x-1)\left[-2x^2+x-1-2x^2\sqrt{2(x^2+1)}\right]}{x\sqrt{2(x^2+1)}(\sqrt{2}x^2+\sqrt{x^2+1})}\Rightarrow f'(x)=0\Leftrightarrow x=1$$

Qua 1 thì $f'(x)$ đổi dấu từ dương sang âm nên

$$f'(x)\le f(1)=0,\forall x>0$$

Điều đó có nghĩa là

$$\sqrt{x^2+1}\le x\sqrt{2}-\left(\sqrt{2}-\frac{1}{\sqrt{2}}\right)\ln x,\forall x>0$$

Sử dụng bất đẳng thức phụ này cho n biến và cộng vế theo vế ta có

$$\sqrt{a_1^2+1}+\sqrt{a_2^2+1}+...+\sqrt{a_n^2+1}\le\sqrt{2}(a_1+a_2+...+a_n)-\left(\sqrt{2}-\frac{1}{\sqrt{2}}\right)(\ln a_1+\ln a_2+...+\ln a_n)$$

$$=\sqrt{2}(a_1+a_2+...+a_n)-\left(\sqrt{2}-\frac{1}{\sqrt{2}}\right)\ln\prod_{i=1}^{n}a_i$$

$$=\sqrt{2}(a_1+a_2+...+a_n)$$

Vậy bất đẳng thức được chứng minh. Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a_1=...=a_n=1$.

Nhận xét. Bài toán trên còn có thể giải quyết bằng một bất đẳng thức phụ quen thuộc

$$\sqrt{x^2+1}\le\sqrt{2}(x-\sqrt{x}+1)\Leftrightarrow 0\le(\sqrt{x}-1)^4,\forall x>0$$

Sử dụng bất đẳng thức trên lần lượt cho n biến cộng lại ta có

$$\sqrt{a_1^2+1}+\sqrt{a_2^2+1}+...+\sqrt{a_n^2+1}\le\sqrt{2}(a_1+a_2+...+a_n)+\sqrt{2}\left(n-\sum_{i=1}^{n}\sqrt{a_i}\right)$$

$$\le\sqrt{2}(a_1+a_2+...+a_n)$$

Bất đẳng thức đã được giải quyết hoàn toàn.

Bài toán 28. [Algebraic Inequalities – Old and New Method]

Cho a,b,c là các số thực dương thỏa mãn $abc=1$. Chứng minh rằng

$$a^2+b^2+c^2+9(ab+bc+ca)\ge 10(a+b+c)$$

Chứng minh. Ta có cần xác định hệ số k sao cho bất đẳng thức sau là đúng

$$a^2+9bc=a^2+\frac{9}{a}\ge 10a+k\ln a$$

Tương tự các phần trước ta có tìm ra $k=-17$. Ta có sẽ chứng minh

$$f(a)=a^2+\frac{9}{a}-10a+17\ln a\ge 0$$

Thật vậy

$$f'(a)=2a-\frac{9}{a^2}-10+\frac{17}{a}=\frac{2a^3-10a^2+17a-9}{a^2}=\frac{(a-1)(2a^2-8a+9)}{a^2}$$

$$f'(a)=0\Leftrightarrow a=1$$

Từ đây, ta có thể dễ dàng thấy được $f(a)\ge f(1)=0,\forall a>0$ hay

$$a^2+\frac{9}{a}-10a\ge -17\ln a$$

Sử dụng tương tự với b,c rồi cộng lại vế theo vế, ta có đpcm. Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a=b=c=1$.

Phần 8. *U.C.T* mở rộng

Ngay từ đầu bài viết ta đã xét đến việc xác định hệ số m theo cách

$$h(a_i) \geq f(a_i) + ma^k + n$$

Với điều kiện xác định của bài toán là $a_1^k + a_2^k + ... + a_n^k = n$

Tuy nhiên với cách xác định đó đối với một số bài toán lại không mang lại hiệu quả. Điều đó cũng không phải hoàn toàn là không tốt. Vì nó sẽ thôi thúc chúng ta tìm ra các dạng xác định hệ số khác. Một cách trực quan chúng ta sẽ phân tích một bài toán cụ thể để thấy được những gì đã được nêu ra ở trên

Bài toán 29. [Tạp chí Crux, Canada]

Cho a,b,c là các số thực dương thỏa mãn $a+b+c=3$. Chứng minh rằng

$$\frac{1}{9-ab} + \frac{1}{9-bc} + \frac{1}{9-ac} \leq \frac{3}{8}$$

Chắc hẳn ngay từ đầu khi đi vào chứng minh bài toán này bạn sẽ nghĩ ngay đến việc thiết lập một bất đẳng thức phụ dạng

$$\frac{8}{9-x} \leq 1 + mx + n \Rightarrow \frac{8}{9-x} \leq 1 + m(x-1)$$

Dễ dàng dự đoán $m = \frac{1}{8}$. Nhưng rất đáng tiếc với m như vậy thì bất đẳng thức trên hoàn toàn không đúng kể cả tư tưởng chia trường hợp như ở phần 3 cũng không thể áp dụng được. Thật vậy

$$\frac{8}{9-x} \leq \frac{7+x}{8} \Leftrightarrow 0 \leq -\frac{(x-1)^2}{8(9-x)}$$

Tuy nhiên ***U.C.T*** vẫn có tác dụng trong trường hợp này nhưng bằng một ý tưởng mới mẻ hơn. Hãy chú ý đến cách thiết lập bất đẳng thức phụ sau

$$\frac{8}{9-x} \leq 1 + m(x^2-1) + n(x-1) \quad (*)$$

Việc xác định hệ số trong bất đẳng thức trên đòi hỏi sự chặt chẽ trong lập luận vì đôi khi nới lỏng miền nghiệm của biến sẽ khiến cho bài toán không đúng. Có nhiều hệ số thỏa mãn để tạo thành đại lượng bình phương $(x-1)^2$ nhưng ta phải xác định sao cho dấu của bất đẳng thức là đúng. Ta có

$$(*) \Leftrightarrow 0 \leq (x-1)\left(m(x+1) + n - \frac{1}{9-x}\right) \quad (**)$$

Từ phân tích trên rõ ràng ta phải xác định n theo m sao cho xuất hiện nghiệm $x=1$ để hình thành đại lượng $(x-1)^2$, tức là

$$m(x+1) + n - \frac{1}{9-x} = 0 \Leftrightarrow n = \frac{1}{9-x} - m(x+1) \Rightarrow n = \frac{1}{8} - 2m$$

Từ đây thế vào (**) ta có

$$(**) \Leftrightarrow 0 \leq (x-1)\left(m(x+1) - 2m + \frac{1}{8} - \frac{1}{9-x}\right)$$

$$\Leftrightarrow 0 \leq (x-1)^2(72m - 8mx - 1)$$

Dễ thấy rằng việc xác định hệ số ở đây không còn đơn giản như trước. Nó đòi hỏi ta phải tìm ra những ước lượng chặt chẽ để bất đẳng thức không đổi chiều. Ta hãy chú ý đến điều kiện của bài toán để tìm ra ước lượng "tốt nhất". Chú ý rằng $3 > \max\{ab, bc, ca\} \geq 0$

tuy nhiên đó chưa phải là đánh giá "tốt nhất" vì ta còn có thể làm chặt hơn nữa là $\frac{9}{4} \ge \max\{ab, bc, ca\} \ge 0$. Tuy nhiên đối với bài toán này thì chỉ cần sử dụng điều kiện yếu hơn mà thôi.

Đầu tiên ra đưa ra một số nhận xét sau: Đầu tiên ta cần xác định hệ số m để bất đẳng thức trên đúng với $\forall x \in [0,3)$. Ta thấy trường hợp $m < 0$ sẽ nhận được một bất đẳng thức ngược chiều nếu cho $x = 0$, tất nhiên đây là điều ta mà không mong muốn. Vậy có thể dự đoán $m \ge 0$, do đó

$$72m - 1 - 8mx \ge 72m - 1 - 24 = 48m - 1$$

Ta cần có $48m \ge 1 \Leftrightarrow m \ge \frac{1}{48}$. Vậy nên ta sẽ dự đoán $m = \frac{1}{48} \Rightarrow n = \frac{1}{12}$.

Công việc dự đoán đã hoàn tất. Bây giờ ta sẽ thử chứng minh xem nó có đúng thật không. Và thật vậy ta có bất đẳng thức phụ sau

$$\frac{8}{9-x} \le \frac{x^2 + 4x + 43}{48} \Leftrightarrow 0 \le \frac{(x-1)^2(3-x)}{48(9-x)}$$

Điều này hiển nhiên đúng

Áp dụng bất đẳng thức phụ trên với các biến ab, bc, ca ta có

$$\frac{1}{9-ab} + \frac{1}{9-bc} + \frac{1}{9-ac} \le \frac{1}{48}(a^2b^2 + b^2c^2 + c^2a^2 + 4ab + 4bc + 4ca) + \frac{43}{16}$$

Ta cần phải chứng minh bất đẳng thức sau

$$a^2b^2 + b^2c^2 + c^2a^2 + 4ab + 4bc + 4ca \le 15$$

Đặt $k = ab + bc + ca$, áp dụng bất đẳng thức *AM-GM* và bất đẳng thức Schur ta có $k \le 3, abc \ge \max\left\{0, \frac{4x\text{-}9}{3}\right\}$. Ta xét hai trường hợp sau

+ Trường hợp 1. Nếu $4x \le 9$ thì

$$\begin{aligned} a^2b^2 + b^2c^2 + c^2a^2 + 4ab + 4bc + 4ca &= (ab + bc + ca)^2 + 4(ab + bc + ca) - 6abc \\ &= k^2 + 4k - 6abc \le \frac{81}{16} + 9 = \frac{225}{16} < 15 \end{aligned}$$

+ Trường hợp 2. Nếu $4x \ge 9$ thì

$$\begin{aligned} a^2b^2 + b^2c^2 + c^2a^2 + 4ab + 4bc + 4ca &= (ab + bc + ca)^2 + 4(ab + bc + ca) - 6abc \\ &= k^2 + 4k - 6abc \le k^2 + 4k - 2(4k - 9) \\ &= (k-1)(k-3) + 15 \le 15 \end{aligned}$$

Bất đẳng thức được chứng minh. Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a = b = c = 1$.

Qua quá trình nhận xét và phân tích ở trên hi vọng rằng các bạn đã hiểu được cách tìm ra hệ số. Ở các bài toán sau nếu không thật sự cần thiết, việc thiết lập bất đẳng thức phụ sẽ đưa ra một cách khái quát hơn. Chúng ta hãy đến với bài toán sau

<u>Bài toán 30</u>. [Moldova TST 2005]

Cho a, b, c là các số thực dương thỏa mãn $a^4 + b^4 + c^4 = 3$. Chứng minh rằng

$$\frac{1}{4-ab} + \frac{1}{4-bc} + \frac{1}{4-ca} \le 1$$

Chứng minh. Với $0 \le x \le \frac{3}{2}$, ta luôn có

$$\frac{3}{4-x} \le \frac{2x^2+x+12}{15} \Leftrightarrow 0 \le \frac{(x-1)^2(3-2x)}{15(4-x)}$$

Lại có $\max\{ab,bc,ca\} \le \sqrt{\frac{3}{2}} < \frac{3}{2}$ nên ta có

$$\frac{3}{4-ab}+\frac{3}{4-bc}+\frac{3}{4-ca} \le \frac{2(a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2)+ab+bc+ca+36}{15}$$

Áp dụng bất đẳng thức *AM-GM* và *Cauchy-Schawrz* ta có

$$a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2 \le a^4+b^4+c^4=3$$

$$ab+bc+ca \le \sqrt{3(a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2)} \le 3$$

Cộng các các bất đẳng thức phụ trên vế theo vế ta có điều phải chứng minh.
Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a=b=c=1$.

Nhận xét. Đây là một bài toán không khó và có nhiều cách tiếp cận khác nhau.

Áp dụng bất đẳng thức quen thuộc sau $\frac{1}{x}+\frac{1}{y} \ge \frac{4}{x+y}$ và bất đẳng thức *AM-GM*.

Ta có

$$\frac{1}{2}\left(\frac{1}{4-a^2}+\frac{1}{4-b^2}\right) \ge \frac{1}{2}\left(\frac{4}{8-a^2-b^2}\right) \ge \frac{2}{8-2ab} = \frac{1}{4-ab}, \forall a,b \in [0,2]$$

Qui bài toán về chứng minh

$$\frac{1}{4-a^2}+\frac{1}{4-b^2}+\frac{1}{4-c^2} \le 1$$

Sử dụng bất đẳng thức phụ sau

$$\frac{1}{4-a^2} \le \frac{a^4+15}{18}$$

Ngoài ra ta còn có một cách khá trực quan và dễ thực hiện đó là qui đồng và sử dụng bất đẳng thức Schur.

<u>Bài toán 31</u>. [Phạm Kim Hùng]

Cho a,b,c,d là các số thực dương thỏa mãn $a^2+b^2+c^2+d^2=4$. Chứng minh rằng

$$\frac{1}{3-abc}+\frac{1}{3-bcd}+\frac{1}{3-cda}+\frac{1}{3-dab} \le 2$$

Chứng minh. Đây là một bài toán khó vì vậy việc thiết lập hệ số phải cần những đánh giá chặt chẽ và suy luận hợp lí. Chúng ta hãy cùng phân tích con đường đi đến lời giải của bài toán này

Ta sẽ xác định hệ số m,n sao cho

$$\frac{2}{3-x} \le 1+m(x^2-1)+n(x-1), \forall \frac{8}{3\sqrt{3}} \ge x \ge 0$$

Như đã phân tích ở trên ta tìm ra $n=\frac{1}{2}-2m$, khi đó bất đẳng thức cần chứng minh tương đương với

$$(x-1)^2(6m-1-2mx) \ge 0$$

Dễ dàng kết luận $m \ge 0$ do đó

$$6m-1-2mx \ge 6m-1-\frac{16}{3\sqrt{3}}m$$

Ta cần có

$$6m-1-\frac{16}{3\sqrt{3}}m\geq 0\Rightarrow m\geq \frac{1}{6-\frac{16}{3\sqrt{3}}}$$

Do $\sqrt{3}>\frac{5}{3}$ nên ta chỉ cần có $m\geq \frac{1}{6-\frac{16}{5}}=\frac{5}{14}$

Từ đây ta sẽ chọn $m=\frac{5}{14}\Rightarrow n=-\frac{3}{14}$ từ đó ta có bất đẳng thức phụ sau

$$\frac{2}{3-x}\leq \frac{5x^2-3x+12}{14}\Leftrightarrow 0\leq \frac{(x-1)^2(8-5x)}{14(3-x)}$$

Điều này hiển nhiên đúng với $\frac{8}{3\sqrt{3}}>\frac{8}{5}\geq x\geq 0$.

Sử dụng bất đẳng thức phụ trên và chú ý là $\max\{abc,bcd,cda,dab\}\leq \frac{8}{3\sqrt{3}}$ suy ra ta cần chứng minh.

$$5(a^2b^2c^2+b^2c^2d^2+c^2d^2a^2+d^2a^2b^2)-3(abc+bcd+cda+dab)\leq 8$$

Có thể chứng minh bất đẳng thức trên bằng nhiều cách. Sau đây xin trình bày một cách dựa vào kỹ thuật hàm lồi.

Đặt $t^2=\frac{a^2+b^2}{2},k^2=\frac{c^2+d^2}{2},x=ab,y=cd$ khi đó, ta có $t^2\geq x,k^2\geq y$. Bất đẳng thức cần chứng minh tương đương với

$$f(x)=10x^2k^2+10y^2t^2-3x\sqrt{2y+2k^2}-3y\sqrt{2x+2t^2}-8$$

Ta có

$$f^{//}(x)=20k^2+\frac{3y}{\sqrt{(2x+2t^2)^3}}\geq 0$$

Suy ra $f(x)$ là hàm lồi, do đó

$$f(x)\leq \max\{f(t^2),f(0)\}$$

Ta có

$$f(0)=\left(yt\sqrt{2}+1\right)\left(5yt\sqrt{2}-8\right)\leq 0 \text{ do } yt\sqrt{2}\leq \frac{8}{3\sqrt{3}}<\frac{8}{5}$$

$$f(t^2)=10y^2t^2-6yt+10k^2t^2-3t\sqrt{2y+2k^2}-8=g(y)$$

Tương tự như trên ta cũng có $g(y)$ là hàm lồi nên

$$g(y)\leq \max\{g(k^2),g(0)\}$$

Ta cũng có

$$g(0)=\left(kt\sqrt{2}+1\right)\left(5kt\sqrt{2}-8\right)\leq 0 \text{ do } kt\sqrt{2}\leq \frac{8}{3\sqrt{3}}<\frac{8}{5}$$

$$g(t^2)=4(kt-1)(5kt+1)\leq 0 \text{ do } kt\sqrt{2}\leq \frac{k^2+t^2}{2}=1$$

Vậy bất đẳng thức được chứng minh xong.

Ngay từ ban đầu chúng tôi đã nói đây là một bất đẳng thức không dễ và đòi hỏi những đánh giá chặt chẽ. ***U.C.T*** ở đây đóng vai trò là một bàn đạp quan trọng để đi đến lời giải.

Bài toán 32. [Võ Quốc Bá Cẩn]

Cho các số thực a,b,c,d thỏa $a^2+b^2+c^2+d^2=1$, chứng minh bất đẳng thức

$$\frac{1}{1-ab}+\frac{1}{1-bc}+\frac{1}{1-cd}+\frac{1}{1-da}\le\frac{16}{3}$$

Chứng minh. Tương tự các bài toán trước, ta thiết lập được bất đẳng thức sau với mọi $x\le\frac{1}{2}$

$$\frac{9}{1-x}\le 32x^2+10$$

Từ đây, ta suy ra được

$$\frac{1}{1-ab}+\frac{1}{1-bc}+\frac{1}{1-cd}+\frac{1}{1-da}\le\frac{32}{9}(a^2b^2+b^2c^2+c^2d^2+d^2a^2)+\frac{40}{9}$$
$$=\frac{32}{9}(a^2+c^2)(b^2+d^2)+\frac{40}{9}$$
$$\le\frac{8}{9}(a^2+b^2+c^2+d^2)^2+\frac{40}{9}=\frac{16}{3}$$

Từ đây, ta có đpcm. Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a=b=c=d=\pm\frac{1}{2}$.

Nhận xét. Bài toán này được đặt ra để "làm mạnh" bài toán sau của Phạm Văn Thuận

$$\frac{1}{1-ab}+\frac{1}{1-bc}+\frac{1}{1-cd}+\frac{1}{1-da}+\frac{1}{1-ac}+\frac{1}{1-bd}\le 8$$

với cùng giả thiết như trên.

Lời giải của tác giả cho bài toán này rất dài và phức tạp, trong khi dùng ***U.C.T*** mở rộng ta lại có được một lời giải rất ngắn gọn và đơn giản!

Ngoài ra, chúng ta còn có một cách "làm mạnh" khác cho bài toán của Phạm Văn Thuận, ta có

$$\frac{1}{1-\left(\frac{a+b}{2}\right)^2}+\frac{1}{1-\left(\frac{b+c}{2}\right)^2}+\frac{1}{1-\left(\frac{c+d}{2}\right)^2}+\frac{1}{1-\left(\frac{d+a}{2}\right)^2}+\frac{1}{1-\left(\frac{a+c}{2}\right)^2}+\frac{1}{1-\left(\frac{b+d}{2}\right)^2}\le 8$$

Bài toán này đã được bạn ZhaoBin, một sinh viên người Trung Quốc đưa ra một lời giải rất đẹp bằng cách sử dụng bất đẳng thức *Cauchy-Schwarz*, ở đây, chúng tôi xin được giới thiệu một lời giải khác theo tư tưởng ***U.C.T***. Sử dụng bất đẳng thức trong bài, ta chỉ cần chứng minh

$$(a+b)^4+(a+c)^4+(a+d)^4+(b+c)^4+(b+d)^4+(c+d)^4\le 6$$

Thật vậy, ta có

$$(a+b)^4=2(a^4+b^4+6a^2b^2)-(a-b)^4\le 2(a^4+b^4+6a^2b^2)$$

Tương tự với các số hạng còn lại, ta suy ra được

$$VT\le 6(a^2+b^2+c^2+d^2)^2=6$$

Bất đẳng thức được chứng minh xong.

Thật tự nhiên, câu hỏi sau được đặt ra, liệu bất đẳng thức sau có đúng?

$$\frac{1}{1-\left(\frac{a+b}{2}\right)^2}+\frac{1}{1-\left(\frac{b+c}{2}\right)^2}+\frac{1}{1-\left(\frac{c+d}{2}\right)^2}+\frac{1}{1-\left(\frac{d+a}{2}\right)^2}\le\frac{16}{3}$$

Thật đáng tiếc là bất đẳng thức trên lại không đúng! Các bạn chỉ cần cho $a=b=0.4$, và $c=d=\sqrt{0.84}$.

Bài toán 33. [Vasile Cirtoaje]
Cho các số không âm a,b,c,d có tổng bằng 4, chứng minh bất đẳng thức sau

$$\frac{1}{5-abc}+\frac{1}{5-bcd}+\frac{1}{5-cda}+\frac{1}{5-dab}\le 1$$

Chứng minh. Ta có thể thiết lập được bất đẳng thức sau với mọi $2\ge x>0$

$$\frac{48}{5-x}\le x^2+x+10$$

Do đó
+, Nếu $\max\{abc,bcd,cda,dab\}\le 2$ thì sử dụng bất đẳng thức trên, ta cần chứng minh

$$a^2b^2c^2+b^2c^2d^2+c^2d^2a^2+d^2a^2b^2+abc+bcd+cda+dab\le 8$$

Bất đẳng thức này có thể dễ dàng chứng minh bằng dồn biến hoặc dùng hàm lồi.
+, Nếu $\max\{abc,bcd,cda,dab\}\ge 2$, không mất tính tổng quát, giả sử $abc\ge 2$, khi đó, chú ý rằng với mọi $x,y\ge 0, x+y\le 5$, ta có

$$\frac{1}{5}+\frac{1}{5-x-y}-\frac{1}{5-x}-\frac{1}{5-y}=\frac{xy(10-x-y)}{5(5-x)(5-y)(5-x-y)}\ge 0$$

Suy ra

$$\frac{1}{5-x}+\frac{1}{5-y}\le\frac{1}{5-x-y}+\frac{1}{5}$$

Và do đó, với mọi $x,y,z\ge 0, x+y+z\le 5$ ta có

$$\frac{1}{5-x}+\frac{1}{5-y}+\frac{1}{5-z}\le\frac{1}{5-x-y-z}+\frac{2}{5}$$

Chú ý rằng $\sum_{cyc}(a^2b^2c^2+abc)\le 8$ và $abc\ge 2$ nên $bcd+cda+dab<5$, do đó

$$\frac{1}{5-bcd}+\frac{1}{5-cda}+\frac{1}{5-dab}\le\frac{1}{5-d(ab+bc+ca)}+\frac{2}{5}$$

Ta cần chứng minh

$$\frac{1}{5-abc}+\frac{1}{5-d(ab+bc+ca)}\le\frac{3}{5}$$

Đặt $x=4-d$, do $abc\ge 2$ nên $4\ge x=a+b+c\ge 3\sqrt[3]{abc}\ge 3\sqrt[3]{2}$, theo bất đẳng thức *AM-GM* thì

$$abc\le\frac{1}{27}x^3, ab+bc+ca\le\frac{1}{3}x^2$$

Do đó, ta chỉ cần chứng minh

$$\frac{1}{5-\frac{1}{27}x^3}+\frac{1}{5-\frac{1}{3}x^2(4-x)}\le\frac{3}{5}$$

Hay

$$f(x)=x^6-4x^5-80x^3+360x^2-675\le 0$$

Ta có

$$f^{/}(x)=6x^4(x-4)+4x^3(x-12)+48x(15-4x)<0$$

Suy ra $f(x)$ là hàm nghịch biến, do đó

$$f(x)\le f(3\sqrt[3]{2})=27(48\sqrt[3]{4}-77)<0$$

Từ đây, ta có đpcm. Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a=b=c=d=1$.

Phần 9. Lời kết

Sau một quá trình tìm hiểu và phân tích cụ thể các bài toán, chắc hẳn rằng các bạn cũng đã phần nào cảm nhận được nét đẹp của ***U.C.T*** dù rằng thực ra đây là một kĩ thuật cực kì đơn giản và dễ hiểu. Chúng tôi không xem ***U.C.T*** là một phương pháp chính thống mà đơn giản nó là một kĩ thuật cần biết và cần nắm vững khi bạn học bất đẳng thức. Nhiều người quan niệm rằng ***U.C.T*** không có ý nghĩa gì nhưng theo bản thân chúng tôi nó nên được khái quát để sử dụng trong một số trường hợp. ***U.C.T*** là một bước đệm quan trọng và đôi khi mang nhiều ý nghĩa trên con đường đi tìm lời giải cho bài toán. Một kĩ thuật hay không nhất thiết nó là nó giải được tất cả các dạng toán mà là nó phải đưa ta đến những ý tưởng, đường đi sáng sủa, dễ nghĩ, dễ nhận thấy bằng mắt trực quan.
Trong chuyên đề này nhiều bài toán hình thức cồng kềnh như USAMO 2003, JMO 1997,... đều là những bài toán không hề khó, nhưng nếu không chọn đúng hướng làm thì sẽ dẫn đến những lời giải chỉ chấp nhận đúng về mặt toán học. Đó là những bài toán cơ bản đại diện cho ***U.C.T*** kết hợp với kĩ thuật chuẩn hóa. Tuy nhiên đó chưa phải là điểm dừng.
Ở phần tiếp theo, xuất hiện nhiều bài toán mang đậm bản sắc hơn tức là nếu chỉ sử dụng mỗi ***U.C.T*** thì sẽ không đi đích. Cách khắc phục duy nhất là phân chia trường hợp để giải quyết. Đây cũng chính là cơ sở để tìm ra các khoảng nghiệm cần xét của biến. Việc đánh giá ở đây đòi hỏi ở người làm sự tinh tế và khéo léo hơn ở các phần trước. Tuy nhiên nếu bạn có niềm tin mọi chuyện đều có thể được giải quyết.
Sau khi đã nắm trong tay những kiến thức nhất định về kỹ thuật chúng ta bước qua một khoảng không gian phức tạp hơn đó là dùng ***U.C.T*** để giải quyết những bài toán mà điểm cực trị đạt được tại 2 chỗ. Bao gồm 2 trường hợp đó là khi tất cả các biến bằng nhau và trường hợp có $(n-1)$ biến bằng nhau nhưng khác biến còn lại. Ở đây ta chú ý đến bất đẳng thức Vornicu Schur để khắc phục nhược điểm của ***U.C.T*** cơ bản.
Phần kĩ thuật phân tách theo tổng của 1 cũng là một dạng rất đẹp của kỹ thuật này, một số bài toán tiêu biểu cho dạng phân tách này là IMO 2001 và một số bài toán đã nêu ở trên. Dù ***U.C.T*** ở đây dùng theo một tư tưởng khác với các phần trước.
Như các bạn đã biết ***U.C.T*** thông thường được biết đến với các bài toán mà biến số độc lập không liên quan đến nhau. Tuy nhiên nếu chỉ xét với lớp bài toán như vậy thì chưa lột tả hết nét đẹp của kĩ thuật đơn giản này. Ta vẫn có thể sử dụng ***U.C.T*** để tìm ra những bất đẳng thức phụ với điều kiện liên quan mật thiết với nhau. Tức là không thể tách theo đơn lượng từng biến để giải quyết. ***U.C.T*** ở đây đòi hỏi bạn phải có những kiến thức cơ bản của hàm số để tìm ra các ước lượng chinh xác.
Cuối cùng chúng ta sẽ đã đi đến một số bài toán khó mà theo nhiều người quan niệm là không thể giải quyết bằng ***U.C.T***, điều này là một điểm yếu của kỹ thuật này. Khi việc thiết lập hệ số được thắt chặt hơn thì mọi chuyện sẽ khác. Như các bạn đã thấy ở trên ***U.C.T*** mở rộng mang những đặc điểm phức tạp hơn nhưng hiệu quả mang lại thì quả là bất ngờ. Một số bài toán rất khó đã được đưa về dạng đơn giản hơn để giải quyết theo một số phương pháp đã biết. Đó là một nét mới khá độc đáo của kỹ thuật này. Tuy nhiên chắc hẳn đó vẫn chưa phải là ***U.C.T*** "chặt" nhất. Còn rất nhiều điều nữa ở kỹ thuật này chờ các bạn khám phá. Chúng tôi xin kết thúc bài viết này tại đây. Hi vọng rằng với những dòng tâm sự cùng các bạn về bất đẳng thức đã phần nào gợi mở cho các bạn một cái gì đó giúp các bạn tìm thêm những ý tưởng sáng tạo mới, những hiểu biết mới. Và hãy luôn quan niệm rằng đằng sau lời giải cho mỗi bài toán là cả một quá trình dự đoán, thử, sai và đúng. Hẹn gặp lại các bạn trong một ngày không xa.

Phần 10. Bài tập áp dụng

Bài toán 1. [Diễn đàn toán học]

Cho a,b,c,d,e là các số thực không âm thỏa mãn $a^3+b^3+c^3+d^3+e^3=1$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức

$$\frac{a^2}{1-a^3}+\frac{b^2}{1-b^3}+\frac{c^2}{1-c^3}+\frac{d^2}{1-d^3}+\frac{e^2}{1-e^3}$$

Bài toán 2. [Vasile Cirtoaje, Crux Mathematicorum, Problem 3032]

Cho a,b,c là các số thực không âm thỏa mãn $a^2+b^2+c^2=1$. Chứng minh rằng

$$\frac{1}{1-ab}+\frac{1}{1-bc}+\frac{1}{1-ca}\le\frac{9}{2}$$

Bài toán 3. [Mathematical Excalibur, Vol 9, Num 1, 8/2004]

Cho a,b,c,d là các số thực dương thỏa mãn $a+b+c+d=4$. Chứng minh rằng

$$6(a^3+b^3+c^3+d^3)\ge(a^2+b^2+c^2+d^2)+\frac{1}{8}$$

Bài toán 4. [Mihai Piticari, Dan Popescu, Old and New Inequalities]

Cho a,b,c là các số thực dương nhỏ thỏa mãn $a+b+c=1$. Chứng minh rằng

$$6(a^3+b^3+c^3)+1\ge5(a^2+b^2+c^2)$$

Bài toán 5. [Titu Andreescu, Gabriel Dospinescu, Old and New Inequalities]

Cho a,b,c là các số thực dương nhỏ thỏa mãn $a+b+c=1$. Chứng minh rằng

$$\frac{1}{1+a^2}+\frac{1}{1+b^2}+\frac{1}{1+c^2}\le\frac{27}{10}$$

Bài toán 6. [Andrian Zahariuc, Old and New Inequalities]

Cho $a,b,c\in(1,2)$. Chứng minh rằng

$$\frac{b\sqrt{a}}{4b\sqrt{c}-c\sqrt{a}}+\frac{c\sqrt{b}}{4c\sqrt{a}-a\sqrt{b}}+\frac{a\sqrt{c}}{4a\sqrt{b}-b\sqrt{c}}\ge1$$

Bài toán 7. [Vũ Đình Quý]

Cho a,b,c là các số thực dương thỏa mãn $abc=1$. Chứng minh rằng

$$\frac{1}{a^2-a+1}+\frac{1}{b^2-b+1}+\frac{1}{c^2-c+1}\le3$$

Bài toán 8. [Vasile Cirtoaje]

Cho a,b,c,d là các số thực dương thỏa mãn $abcd=1$. Chứng minh rằng

$$\frac{1+a}{1+a^2}+\frac{1+b}{1+b^2}+\frac{1+c}{1+c^2}+\frac{1+d}{1+d^2}\le4$$

Bài toán 9. [Vasile Cirtoaje, GM-B,11,1999]

Cho a,b,c,d là các số thực dương thỏa mãn $abcd=1$. Chứng minh rằng

$$\frac{1}{1+a+a^2+a^3}+\frac{1}{1+b+b^2+b^3}+\frac{1}{1+c+c^2+c^3}+\frac{1}{1+d+d^2+d^3}\geq 1$$

Bài toán 10. [China TST 2004]
Cho a,b,c,d là các số thực dương thỏa mãn $abcd=1$. Chứng minh rằng

$$\frac{1}{(1+a)^2}+\frac{1}{(1+b)^2}+\frac{1}{(1+c)^2}+\frac{1}{(1+d)^2}\geq 1$$

Bài toán 11. [Arkady Alt, Crux mathematicorum]
Chứng minh rằng với mọi $a,b,c>0$ ta có

$$\frac{a}{\sqrt[3]{a+b}}+\frac{b}{\sqrt[3]{b+c}}+\frac{c}{\sqrt[3]{c+a}}\geq \frac{a^{2/3}+b^{2/3}+c^{2/3}}{\sqrt[3]{2}}$$

....

Complete

- Võ Quốc Bá Cẩn
- Nguyễn Thúc Vũ Hoàng

Trong bài viết có sử dụng nhiều bài toán trích dẫn từ

- Algebraic Inequalites – Old and New Method của tác giả Vasile Cirtoaje .
- Sáng tạo Bất đẳng thức của tác giả Phạm Kim Hùng.
- Old and New Inequalities của các tác giả Titu Andreescu, Vasile Cirtoaje, G. Dospinescu, M. Lascu.